泛函分析笔记

叶胥达　abneryepku@pku.edu.cn

2022 年 1 月 4 日

目录

1 Banach 代数

1.1 Banach 代数的定义

可除代数: 代数 A 称为可除的, 若 $\forall a \neq 0$, $a \in A$, a^{-1} 存在.
理想: $J \neq A$, $JA \subset A$ 且 $AJ \subset A$.
商代数: $B = A/J$, 其上的代数运算为加法和乘法.
定理 5.1.9: A 的理想 J 是极大的, 当且仅当商代数 A/J 是可除代数. Banach 代数: 代数 A 称为 Banach 代数, 如果 A 上有完备的范数 $\|\cdot\|$ 满足不等式 $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$.

例 (多项式函数空间) 设 $A = \mathbb{C}[x]$, 则 A 是一个没有逆元的代数. 对任何多项式 $p(x)$,

$$J = \{f(x) \in A : p(x) \mid f(x)\}$$

是一个理想. J 是极大理想当且仅当 $p(x)$ 为不可约多项式. 此时

$$A/J = \{q(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg q(x) \leqslant n-1\}$$

其中 $n = \deg p(x)$. 因此 A/J 是除以 $p(x)$ 得到的余数构成的商空间. 根据 Bèzout 定理, 对每个 $q(x) \in A/J$ 存在一个 $r(x) \in A$ 使得

$$q(x)r(x) \equiv 1, \quad \mod p(x)$$

因此 $r(x)$ 是 $q(x)$ 的逆元. 因此 J 是 A 的极大理想, A/J 是可除代数.

例 (连续函数空间) $A = C[0,1]$, 其上定义着连续函数的加法和乘法. 在 A 上赋以范数

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

则 A 是一个 Banach 代数. 此时

$$J = \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}$$

是 A 的极大理想.

例 (线性算子) 设 H 是一个 Hilbert 空间, $A = L(H)$ 是 H 上所有连续线性算子的集合, 并按照复合运算定义乘法. 则 A 是一个 Banach 代数.

定理 5.2.7 (Gelfand-Mazur) 设 A 是一个可除的 Banach 代数, 则 A 等于同构于 $\mathbb{C}$.
因此, 若 J 是 Banach 代数 A 的极大理想, 则 J 是闭的, 且 $A/J \simeq \mathbb{C}$.
如果 J 是一个极大理想, 则可以定义一个 A 到 $\mathbb{C}$ 上的连续同态:

$$\varphi_J : A \mapsto \mathbb{C}$$

使得 $\varphi_J(a) = [a] \in A/J \simeq \mathbb{C}$. 对任何一个极大理想 J, 都可以定义一个这样的连续同态.
反过来, 如果存在一个这样的连续同态, 就可以定义相应的极大理想:
引理 5.2.10 设 A 是一个有单位元的交换 Banach 代数, φ 是 A 到 $\mathbb{C}$ 的一个连续同态, 非退化, 则 $J = \ker A$ 是 A 的一个极大理想.

1.2 C^* 代数

简单来说, C^* 代数是具有共轭运算的代数结构. 最典型的例子是 Hilbert 空间 H 上的全部连续线性算子 $L(H)$. 特别的, C^* 代数满足以下性质:

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \quad \forall a \in A$$

我们可以在 $L(H)$ 当中验证类似的结论. 当 $A \in L(H)$ 为线性算子时, A^* 总是可以定义的, 且

$$\|A^*A\| = \|A\|^2$$

这是因为, 对任何 $x \in H$, 有

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x)$$

注意 A^*A 是自伴算子, 因此两边对 x 取上确界有

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (A^*Ax, x) = \|A^*A\|$$

从而 $L(H)$ 构成一个 C^* 代数. 但是需要注意, $L(H)$ 并非一个交换的 C^* 代数.

1.3 Hilbert 空间上的正常算子

设 H 是 Hilbert 空间, $N \in L(H)$ 是一个正常算子, 即 $NN^* = N^*N$. 定义 A_N 是一切二元多项式 $P(z, \bar{z})$ 对应的算子 $P(N, N^*)$ 在 $L(H)$ 中生成的子代数. 简单来说, A_N 中的元素就是 $P(N, N^*)$ 的极限. 对于算子 $A = P(N, N^*)$, 它的对合运算 (共轭) 是

$$A^* = \bar{P}(N^*, N)$$

当 N 是**正常算子**时, A_N 是一个**交换**的 C^* 代数. 这非常有利于我们研究 N 的谱结构.

1.3.1 连续算符演算

推论 5.5.4 A_N 与 $C(\sigma(N))$ 等距 $*$ 在上同构.

这意味着, 对任何 $f \in C(\sigma(N))$, 都可以定义算子 $f(N) \in L(H)$, 且

$$\|f(N)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(N)} |f(\lambda)|$$

因此, 我们也可以用下面的方法来刻画 $f(N)$. 设 $f_n(z) \in P(z, \bar{z})$ 在 $C(\sigma(N))$ 上 (注意 $\sigma(N)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的紧集) 一致收敛到 $f(z)$, 则 $f_n(N)$ 在强意义下为 Cauchy 列, 因此可以定义

$$f(N) := \lim_{n \to \infty} f_n(N)$$

从这个等距同构可以得到一些有趣的结论:

1. $f(N) \in L(H)$ 可逆当且仅当 $0 \notin f(\sigma(N))$.

   - 若 $0 \notin f(\sigma(N))$, 则 $f^{-1}(z)$ 在 $\sigma(N)$ 上为连续函数. 因此 $f^{-1}(N) \in L(H)$ 满足

     $$f^{-1}(N)f(N) = f(N)f^{-1}(N) = I$$

     因此 $f^{-1}(N)$ 是 $f(N)$ 的逆算子.

   - 若 $f(N)$ 是可逆的, 在二元多项式集合中 $P(z, \bar{z})$ 取一列 $f_n(z)$ 使得

     $$f_n(z) \to f(z), \quad \text{在 } \sigma(N) \text{ 上一致收敛}$$

     根据 A_N 和 $C(\sigma(N))$ 的同构, 有

     $$f(N) = \lim_{n \to \infty} f_n(N)$$

     由于 $f(N)$ 可逆, 故对充分大的 n 有 $f_n(N)$ 可逆, 且

     $$\left\| \left(f_n(N)\right)^{-1} \right\| \leqslant C$$

     对某个常数 C 恒成立. 此时, 多项式 $f_n(z) = P_n(z, \bar{z})$ 一定在 $\sigma(N)$ 上没有零点, 否则 $f_n(\lambda) = 0$ 意味着

     $$g(z) = \frac{f_n(z)}{z - \lambda}$$

     在 $\sigma(N)$ 上连续有界, 因此

     $$f_n(N) = (N - \lambda I)g(N)$$

不是可逆算子, 因为 $N-\lambda I$ 不是可逆的. 因此有

$$\left\|f_n^{-1}(N)\right\| \leqslant C$$

下面来验证 $f_n(z)$ 的一致极限 $f(z)$ 没有零点. 否则设 $f(\lambda)=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\lambda)=0$,

$$\lim_{n\to\infty} |f_n^{-1}(\lambda)| = +\infty$$

进而我们有

$$\lim_{n\to\infty} \left\|f_n^{-1}(N)\right\| \geqslant \lim_{n\to\infty} |f_n^{-1}(\lambda)| = +\infty$$

这与 $\|f_n^{-1}(N)\|$ 有界矛盾! 因此 $f(\lambda)$ 没有零点.

2. 若 $\varphi \in C(\sigma(N))$, 则 $\sigma(\varphi(N)) = \varphi(\sigma(N))$.

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma(\varphi(N)) &\Longleftrightarrow \varphi(N)-\lambda I \text{ 是 } H \text{ 上可逆算子} \\
&\Longleftrightarrow (\varphi-\lambda)(N) \text{ 是 } H \text{ 上可逆算子} \\
&\Longleftrightarrow (\varphi-\lambda)(N) \text{ 是 } H \text{ 上可逆算子} \\
&\Longleftrightarrow \varphi(z)-\lambda \text{ 在 } \sigma(N) \text{ 上有零点} \\
&\Longleftrightarrow \lambda = \varphi(z), \exists z \in \sigma(N) \\
&\Longleftrightarrow \lambda \in \varphi(\sigma(N))
\end{aligned}$$

从上面的结论可以看出, 如果 φ 是实值函数, 则 $\varphi(N)$ 的特征值为实数, 从而 $\varphi(N)$ 是自伴算子. 如果 $\varphi \geqslant 0$ 恒成立, 则 $\varphi(N)$ 是非负的自伴算子.

3. 若 $\phi \in C(\sigma(N))$, $\psi \in C(\sigma(\varphi(N)))$, 则

$$(\psi \circ \phi)(N) = \psi(\phi(N))$$

注意当 N 是正常算子时, $\phi(N)$ 也是正常算子, 因此 $\psi(\phi(N))$ 可以定义.

4. N 是自伴的当且仅当 $\sigma(N) \subset \mathbb{R}$. N 是正算子当且仅当 $\sigma(N) \subset \mathbb{R}^+$. N 是酉算子当且仅当 $\sigma(N) \subset \mathbb{S}^1$.

5. 若 $P \in L(H)$ 是一个正算子, 则它有唯一的正平方根.

例 设 N 是 Hilbert 空间 H 上一个正常算子, 则当 $\lambda \in \rho(N)$ 时,

$$\left\|(N-\lambda I)^{-1}\right\| = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(N))}$$

其中 $d(\lambda, \sigma(N))$ 表示 $\lambda \in \mathbb{C}$ 到紧集 $\sigma(N)$ 的距离.

当 $\lambda \in \rho(N)$ 时, 容易看出

$$f(z) = z - \lambda, \quad g(z) = \frac{1}{z - \lambda}$$

是 $\sigma(N)$ 上的连续函数, 并且 $fg = 1$. 因此有

$$I = f(N)g(N) = (N - \lambda I)g(N)$$

从而 $g(N) = (N - \lambda I)^{-1}$. 于是

$$\left\|(N - \lambda I)^{-1}\right\| = \sup_{\mu \in \sigma(N)} |g(\mu)| = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(N))}$$

故命题成立.

1.3.2 谱族理论

首先我们来证明投影算子的一个简单性质. Hilbert 空间 H 上的连续线性算子 E 称为投影, 若

$$E^2 = E, \quad E = E^*$$

一个直接的结果是: $R(E)$ 是闭集. 事实上, 假设序列 $(x_n) \subset H$ 使得

$$Ex_n \to y, \quad \text{在 } H \text{ 中强收敛}$$

则我们来证明 $y \in R(E)$. 事实上, 由于 E 是有界算子, 故

$$E^2 x_n \to Ey, \quad \text{在 } H \text{ 中强收敛}$$

但 $E^2 x_n = Ex_n$, 故其极限 $y = Ey \in R(E)$. 故 $R(E)$ 是闭集.

根据上面的讨论, 一个投影算子 E 可以由其值域 $R(E)$ 完全确定:

- 若 E 是投影算子, 则 $R = R(E)$ 是 H 中的闭子空间.
- 若 R 是 H 中的闭子空间, 则由 R 可以唯一确定正交投影

$$Ex = \arg\min_{y \in R} \|y - x\|_H, \quad \forall x \in H$$

  也就是说, $Ex \in R$ 是 R 中离 $x \in H$ 最近的那个点.

于是, H 上全部的投影 $P(H)$ 和 H 的全部闭子空间一一对应. 特别的, 恒等算子和零算子都是投影算子. 对于 H 中的闭子空间 A, 记 $E(A)$ 是 H 到 A 的正交投影. 如果投影算子 E, F, 使得 $R(E) \subset R(F)$, 则称 E 是 F 的子投影, 并记 $E \subset F$. 显然, 当闭子空间 $A \subset B$ 时,

$E(A) \subset E(F)$.

谱族是描述无界和有界算子的谱结构的重要工具. 从数学本质上来说, 谱族 $E(\cdot)$ 是一种算子值测度, 即对任何可测集合 A, $E(A)$ 是一个算子. 实际上, 它是 Hilbert 空间上 H 上的一个投影. 下面是一个严格的数学定义:

设 X 是一个局部紧的拓扑空间, $B(X)$ 是 X 上所有 Borel 子集组成的集合类. 设 H 是一个 Hilbert 空间, $P(H)$ 是 H 上的所有投影算子构成的集合.

谱族 $E(\cdot)$ 定义为 $B(X)$ 到 $P(H)$ 的一个映射, 满足:

1. $E(X) = I$;
2. 对于 $B(X)$ 中任意不相交的 Borel 集序列 $\{A_n\}$, 有
$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} E(A_n)$$

显然, 对于任意 $x, y \in H$,
$$(E(\cdot)x, y)$$
是 X 上的一个 Borel 测度. 这个算法被称为谱族 $E(\cdot)$ 对应的谱测度. 特别的, 如果 $x = y$, 则
$$(E(\cdot)x, x)$$
是 X 上的非负测度. 谱族最重要的应用是给出有界正常算子和无界自伴算子的谱分解. 给定一个无界自伴算子 A, 我们有 $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, 因此可以取 $X = \mathbb{R}$ 或 $\sigma(A)$. 谱族 $E(\cdot)$ 的定义为: 对任何 $\Omega \subset \sigma(A)$, 定义
$$E(\Omega) := \chi_{\Omega}(A), \quad \forall \Omega \subset B(\mathbb{R})$$
直观地想, $E(\Omega)$ 是 Ω 中的特征值对应的特征子空间上的正交投影, 不过这样的描述是不准确的, 因为 $\sigma(A)$ 除了点谱还有其他复杂的谱结构. 不过, 特别的有
$$R(E(\{\lambda\})) = \ker(\lambda I - A)$$
注意 $Ax = \lambda_0 x \Longrightarrow \psi(A)x = \psi(\lambda_0)x$ 以及自伴算子的谱分解. 设
$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \mathrm{d}E(\lambda)$$
则当 $x \in R(E(\{\lambda_0\}))$ 时, 有 $E(\mathbb{R} \backslash \{\lambda_0\})x = 0$. 故
$$\begin{aligned} Ax &= \int_{\mathbb{R}} \lambda \mathrm{d}E(\lambda)x \\ &= \lambda_0 E(\{\lambda_0\})x \\ &= \lambda_0 x \end{aligned}$$

对于有界正常算子的讨论是类似的. 根据谱分解定理, H 上的无界自伴算子和谱族是一一对应的.

1.3.3 正常算子的谱分解

我们已经证明, 对于 $f \in C(\sigma(N))$, 总可以定义算子 $f(N) \in A_N$. 一般的, 定义 $B(\sigma(N))$ 为 $\sigma(N)$ 上的有界 Borel 可测函数的集合, 则对任何 $\psi \in B(\sigma(N))$, 可以定义算子 $\psi(N)$. 对任何 $x, y \in H$, 存在一个谱测度 $m_{x,y}$ 使得

$$(\psi(N)x, y) = \int_{\sigma(N)} \psi(z) m_{x,y}(\mathrm{d}z)$$

一般的, 对于 Hilbert 空间上的正常算子 N, 可以定义 $\mathbb{C}$ 上的算子值测度

$$E(\Omega) = \chi_{\Omega \cap \sigma(N)}(N) \in L(N)$$

可以证明 $E(\Omega)$ 构成一个谱族. 直观上看, $E(\Omega)$ 可以视为特征值在 Ω 区域上的特征子空间的投影. 对于任何 $x, y \in H$, 容易看出

$$(E(\cdot)x, y)_H$$

构成 $\mathbb{C}$ 上的一个测度. 下面给出如下的谱分解定理:

定理 5.5.14 (正常算子的谱分解) 设 N 是 Hilbert 空间 H 上的正常算子, $E(\Omega)$ 是 N 所定义的谱族, 则对任意的 $\psi \in B(\sigma(N))$, 存在唯一的算子 $\psi(N) \in L(H)$ 使得对任何 $x, y \in H$, 有

$$(\psi(N)x, y)_H = \int_{\sigma(N)} \psi(z) \mathrm{d}(E(z)x, y)_H$$

对给定的 $\psi \in B(\sigma(N))$, 若取 $\phi(z) = \overline{\psi(z)}\psi(z) = |\psi(z)|^2$, 则可得

$$\phi(N) = (\psi(N))^* \psi(N) \Longrightarrow (\phi(N)x, x) = \|\psi(N)x\|^2$$

因此可得

$$\|\psi(N)x\|^2 = \int_{\sigma(N)} |\psi(z)|^2 \mathrm{d}(E(z)x, x)$$

注意到, 由于 $E(z)$ 是正交投影算子, 故对任何 Borel 集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 有

$$(E(z)x, x) = \|E(z)x\|^2 \geqslant 0$$

因此 $(E(\cdot)x, x)$ 是一个非负的测度.

在**弱**的意义下, 形式上有

$$\psi(N) = \int_{\sigma(N)} \psi(z) \mathrm{d}E(z)$$

下面是两个重要的应用: 自伴算子和酉算子的谱分解.

- 设 A 是 H 上的自伴算子, 则 $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, 且

  $$A = \int_{\sigma(A)} \lambda \mathrm{d}E_\lambda$$

  其中 $E_\lambda = E((-\infty, \lambda] \cap \sigma(A))$, 即特征值不超过 λ 的特征子空间上的正交投影.

- 设 U 是 H 上的酉算子, 则 $\sigma(U) \subset \mathbb{S}^1$, 且

  $$U = \int_{\sigma(A)} e^{i\theta} \mathrm{d}F_\theta$$

  其中 $F_\theta = E(\mathbb{S}^1 \cap e^{i[0,\theta]})$.

这里的积分在 Stieltjes 积分的意义下理解.

尽管 Lebesgue 积分和 Stieltjes 积分的形式不同, 但它们对应的 Riemann 和是相同的. 以自伴算子为例, 在 Lebesgue 积分和 Stieljes 积分的意义下, A 可以表示为

$$A = \int_{\mathbb{C}} \lambda \mathrm{d}E(\lambda), \qquad A = \int_{\mathbb{C}} \lambda \mathrm{d}E_\lambda$$

假设 $\sigma(A)$ 所在的闭区间有一剖分 $\{\lambda_n\}$, 并且 $\lambda_n' \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}]$, 则两者对应的 Riemann 和为

$$\sum_n \lambda_n' E((\lambda_n, \lambda_{n+1}]), \qquad \sum_n \lambda_n' \Big(E_{\lambda_{n+1}} - E_{\lambda_n} \Big)$$

注意到当 $a < b$ 时,

$$\chi((a,b]) = \chi((-\infty, b]) - \chi((-\infty, a]) \Longrightarrow E((a,b]) = E_b - E_a$$

因此上面的两个 Riemann 和是相同的.

1.3.4 正常算子的谱集

设 N 是 Hilbert 空间 H 上的正常算子, 我们来对 N 的谱集进行分类. 设 T 是一个一般的连续线性算子, 定义其预解集为

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ 是 } H \text{ 上的一一映射}\}$$

注意当 $T - \lambda I$ 是满射时, 由开映射定理知 $(T - \lambda I)^{-1}$ 是连续线性泛函. 将 $\sigma(T)$ 分为三类:

- 点谱 $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda I) \neq 0\}$.

  任取非零元素 $x \in \ker(T - \lambda I)$, 可知 $Tx = \lambda x$, 因此 $\sigma_p(T)$ 是 T 的全部特征值的集合.

- 连续谱 $\sigma_c(T)=\{\ker(\lambda I-T)=0,\overline{R(T-\lambda I)}=H\}$.

  这意味着 $(T-\lambda I)^{-1}$ 是无界算子, 且是从 $R(T-\lambda I)$ 到 H 的一一映射. 如果 $R(T-\lambda I)=H$, 则 $(T-\lambda I)^{-1}$ 是 H 上的有界线性算子.

- 剩余谱 $\sigma_r(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\ker(T-\lambda I)=0,\overline{R(T-\lambda)}\neq H\}$.

  一般点谱和剩余谱是较为常见的谱.

下面是常见的例子. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 一个具有光滑边界的开区域, $H=L^2(\Omega)$ 是 Hilbert 空间. 我们知道 Dirichlet 边值条件下的 Laplace 算子为

$$-\Delta_D:H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\mapsto L^2(\Omega)$$

注意

$$R(T)=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\supset C_0^\infty(\Omega)$$

因此 $R(T)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中稠密. 因此 $0\in\sigma_c(T)$.

对于正常算子 N, 我们可以通过它的谱族 E 对它的谱集作充分的刻画. 对于点谱, 我们有如下结论: 对任何 $\lambda\in\mathbb{C}$,

$$R(E(\{\lambda\}))=\ker(N-\lambda I)$$

因此 $E(\{\lambda\})$ 是 Hilbert 空间 H 到 $\ker(N-\lambda I)$ 的正交投影. 一个简单的证明:

- 若 $x\in\ker(N-\lambda I)$, 我们来证明 $E(\{\lambda\})x=x$, 从而自然有 $x\in R(E(\{\lambda\}))$. 事实上,

  $$Nx=\lambda x$$

  因此对任何 $\varphi\in C(\sigma(N))$ 和 $y\in H$, 有

  $$(\varphi(N-\lambda I)x,y)_H=0$$

  于是, $N-\lambda I$ 对应的谱测度 $m_{x,y}$ 恒为 0, 因此对任何 $\psi\in B(\sigma(N))$, 有

  $$\psi(N)x=\psi(\lambda)x$$

  特别取 $\psi=\chi_{\{\lambda\}}$, 有 $E(\{\lambda\})x=x$, 因此 $x\in R(E\{\lambda\})$.

- 若 $x\in R(\{\lambda\})$, 我们来证明 $Nx=\lambda x$. 事实上, 此时容易看出

  $$E(\{\lambda\})x=x$$

  因此仿照课本 p49 的证明有 $Nx=\lambda x$.

另外, $\lambda \in \rho(N)$ 当且仅当存在存在 λ 的邻域 U 使得 $E(U)=0$. 证明:

- 若 $\lambda \in \rho(N)$, 则存在一个邻域 $U \subset \rho(N)$. 对一切 $x, y \in H$, 设 $m_{x,y}$ 是正常算子 N 对应的谱测度, 则
$$(E(U)x, y)_H = \int_{\sigma(N)} \chi_U(z) m_{x,y}(\mathrm{d}z) = 0$$
从而 $E(U)=0$.
- 仿照课本的证明.

1. 点谱: $\lambda \in \sigma_p(N)$.
2. 连续谱: $\lambda \in \sigma_c(N) \Longrightarrow$ 存在序列 (x_n) 满足 $\|x_n\|=1$ 而 $\|(N-\lambda I)x_n\| \to 0$.
3. 谱: $\lambda \in \sigma(N) \Longleftrightarrow \forall \lambda$ 的邻域 U, $E(U) \neq \emptyset$.

正常算子还有另外一种对谱进行分类的方式. 之前我们是对 $E(U)$ 是否为空进行分类, 现在我们可以对 $E(U)$ 的维数进行分类.

- 本质谱: 如果对 $\lambda \in \sigma(N)$ 的任何 Borel 邻域 U, 有 $\dim R(E(U)) = +\infty$, 则 $\lambda \in \sigma_{ess}(N)$;
- 离散谱: 如果对 $\lambda \in \sigma(N)$ 的某个 Borel 邻域 U, 有 $\dim R(E(U)) < +\infty$, 则 $\lambda \in \sigma_d(N)$.

当 N 是正常算子时, 其离散谱有如下判定: $\lambda \in \sigma_d(N)$ 当且仅当:

- λ 是 $\sigma(N)$ 中的孤立点;
- λ 的几何重数有限, 即 $\dim(T-\lambda I) < +\infty$.

我们还是以 $T = (-\Delta_D)^{-1}$ 的为例进行分析. 由于 T 是紧算子, 故对任何 $\lambda \neq 0$, $T-\lambda I$ 是 Fredholm 算子, 从而
$$\dim \ker(T-\lambda I) < +\infty$$
故 $\lambda \in \sigma_d(N)$. 而 0 不是孤立的, 因此 0 是本质谱.

1.4 正常算子的谱理论总结

设 H 是 Hilbert 空间, N 是 H 上的正常算子, 即 $NN^* = N^*N$.

1. 设 A_N 是二元多项式 $P(N, N^*)$ 生成的交换 C^* 代数, 则 A_N 与 $C(\sigma(N))$ 等距同构. 因此对 $\varphi \in C(\sigma(N))$, 都可以自然定义 $\varphi(N) \in A_N$, 并且
$$\|\varphi(N)\| = \sup_{z \in \sigma(N)} |\varphi(z)|$$
当 $\varphi_n \in C(\sigma(N))$ 在紧集 $\sigma(N)$ 上一致收敛到 φ 时, $\varphi_n(N)$ 在 $L(H)$ 中收敛到 $\varphi(N)$.

2. 对于任何 $x, y \in H$,

$$\varphi \mapsto (\varphi(N)x, y)_H$$

可以视为 $C(\sigma(N))$ 上的连续线性泛函, 因此存在 $\sigma(N)$ 上的 Borel 测度 $m_{x,y}$ 使得

$$(\varphi(N)x, y)_H = \int_{\sigma(N)} \varphi(z) m_{x,y}(\mathrm{d}z), \quad \forall \varphi \in C(\sigma(N))$$

对任何有界的 Borel 可测函数 $\psi \in B(\sigma(N))$, 定义 $\psi(N) \in L(H)$ 满足

$$(\psi(N)x, y)_H = \int_{\sigma(N)} \psi(z) m_{x,y}(\mathrm{d}z), \quad \forall \psi \in B(\sigma(N))$$

3. 对任何 Borel 可测集 $\Omega \subset \mathbb{C}$, 定义谱族 (算子值测度)

$$E(\Omega) = \chi_{\Omega \cap \sigma(N)}(N)$$

直观上, $E(\Omega)$ 是 Ω 中特征值对应的特征子空间上的正交投影.

4. 正常算子 N 的谱分解

$$N = \int_{\sigma(N)} z \mathrm{d}E(z)$$

对于 $\psi \in B(\sigma(N))$, 有 $\psi(N) \in L(H)$ 满足

$$\psi(N) = \int_{\sigma(N)} \psi(z) \mathrm{d}E(z)$$

并且

$$\|\psi(N)\| = \sup_{z \in \sigma(N)} |\psi(z)|$$

以上积分在弱的意义下理解.

2 无界算子

2.1 Cayley 变换与自伴算子的谱分解

2.1.1 Cayley 变换

我们之前已经讨论过 Hilbert 空间 H 上的有界正常算子 N 的谱分解. 当 N 是有界算子, 我们可以定义算子值函数 $\varphi(N)$ 和 $\psi(N)$, 当 $\varphi \in C(\sigma(N))$ 和 $\psi \in B(\sigma(N))$ 时. 对于一般的无界算子 T, 一般没有这样的好处. 但是, 如果 T 是一个无界的自伴算子, 我们可以引入其 Cayley 变换 U, 它是 H 上的一个等距算子! 一般的, 我们有如下结论:

定理 6.2.6 设 A 是 Hilbert 空间上 H 上的对称算子, 令

$$U := (A - iI)(A + iI)^{-1}$$

则 U 是从 $R(A + iI)$ 到 $R(A - iI)$ 的等距闭线性一一算子. 注意 $A \pm iI$ 都是单射, 因为 A 是对称算子. 特别的, 若 A 是 H 上的自伴算子, U 是酉算子. 下面来证明: $1 \notin \sigma_p(U)$, 即

$$\ker(U - I) = 0$$

否则, 假设 $y \in H$ 使得 $Uy = y$, 令 $x = (A + iI)^{-1}y$ 有

$$(A - iI)x = (A + iI)x \Longrightarrow x = 0$$

因此我们得到 $1 \notin \sigma_p(U)$.

反过来, 当 U 是酉算子且 $1 \notin \sigma_p(U)$ 时, 可以定义算子

$$A = i(I + U)(I - U)^{-1}$$

且 $D(A) = R(I - U)$. 注意到 $1 \notin \sigma_p(U)$ 时, $I - U$ 是单射, 因此 $(I - U)^{-1}$ 是良定义的. 我们来证明以上定义的 A 是自伴的无界算子:

- A 是对称算子. 事实上, 假设 $y_1, y_2 \in R(I - U)$, 可以证明

  $$(Ay_1, y_2) = (y_1, Ay_2) \Longleftrightarrow ((I + U)x_1, (I - U)x_2) + ((I - U)x_1, (I + U)x_2) = 0$$

  其中 $x_1 = (I - U)^{-1}y_1$, $x_2 = (I - U)^{-1}y_2$. 上式等价于

  $$(x_1, x_2) = (Ux_1, Ux_2)$$

  根据 U 是酉算子即可直接得到.

- A 是自伴算子. 只需验证 $R(A \pm iI) = H$. 注意到

  $$A + iI = 2i(I - U)^{-1}, \quad A - iI = 2iU(I - U)^{-1}$$

  它们显然都是满射. 从而 A 是自伴算子.

按照这种方式, 我们得到了自伴算子 A 和满足 $1 \notin \sigma_p(U)$ 的酉算子的一一对应关系. 更进一步, 如果 $1 \in \rho(U)$, 那么 A 是有界的自伴算子. 对于一般的情况: $1 \in \sigma_c(U)$, 我们有 $R(I - U)$ 在 H 中稠密, 从而 A 则是无界的自伴算子, 并且其定义域 $D(A) = R(I - U)$ 在 H 中稠密.

2.1.2 无界自伴算子的谱集

设 T 是 Hilbert 空间 H 上的闭算子, 定义 $\lambda \in \rho(T)$ 当且仅当 $\lambda I - T$ 是从 $D(T)$ 到 H 的一一映射. 换句话说, 存在一个线性算子 $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ 满足

$$R(\lambda)(\lambda I - T) = I_{D(A)}, \quad (\lambda I - A)R(\lambda) = I_H$$

注意到, 当 A 是闭算子时, $\lambda I - T$ 也是闭算子, 从而其逆映射 $(\lambda I - T)^{-1}$ 是闭算子. 由闭图像定理, $(\lambda I - T)^{-1}$ 是 H 上的有界线性算子. $\rho(T)$ 称为预解集, 其余集 $\sigma(T)$ 为谱点. $\sigma(T)$ 是 $\mathbb{C}$ 中的闭集, 但不一定是紧集. 我们可以证明如下结论:

如果 A 是 Hilbert 空间 H 上的自伴算子, 且 $\sigma(A)$ 有界, 则 A 是有界线性算子.

设 E_λ 是 A 对应的谱族, 则由谱分解定理, 对任何 $x \in H$ 有

$$Ax = \int_{\mathbb{R}} \lambda \mathrm{d}E_\lambda x = \int_{\mathbb{R}} 1_{\sigma(A)} \lambda \mathrm{d}E_\lambda x$$

设 $\sigma(A)$ 包含于半径为 R 的开球, 则

$$\|Ax\|^2 = \int_{\mathbb{R}} 1_{\sigma(A)} |\lambda|^2 \mathrm{d}(E_\lambda x, x) \leqslant R^2 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}(E_\lambda x, x) = R^2 \|x\|^2$$

因此 $\|Ax\| \leqslant R\|x\|$ 对任何 $x \in H$ 成立, 从而 A 是有界线性算子.

类似于有界正常算子的情形, 可以将谱集划分为点谱 $\sigma_p(T)$, 连续谱 $\sigma_c(T)$ 和剩余谱 $\sigma_r(T)$. 对于自伴算子 A, 它的谱集 $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, 且其刻画于有界的情形类似.

一般的, 自伴算子的谱可以用下面的过程刻画:

自伴算子 -> 谱分解 - > 谱集

2.1.3 自伴算子的谱分解

对于无界自伴算子 A, 我们知道其对应的 Cayley 变化换 U 是酉算子且 $1 \notin \sigma_p(U)$. 因此, 通过 U 的谱族 F_θ 能够得到 A 的谱族 E_λ. 因此, 对于有界的 Borel 可测函数 $\phi \in B(\mathbb{R})$, 可以定义 $\phi(A) \in L(H)$ 满足

$$\phi(A) = \int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda) \mathrm{d}E_\lambda, \quad \phi \in B(\mathbb{R})$$

并且

$$\|\phi(A)\| \leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\phi(\lambda)|$$

注意当 A 是无界自伴算子时, $\sigma(A)$ 不一定是紧集, 因此最大值不一定取得到, 等号也不一定成立. 在这里我们没有使用谱测度的语言, 而是直接谱族直接来研究无界算子.

特别的, 如果取 $\phi(x) = \chi_{(-\infty,\lambda]}$, 则得到 $(-\infty,\lambda]$ 对应的特征子空间上的正交投影:

$$E_\lambda = \chi_{(-\infty,\lambda]}(A)$$

对于一般的 Borel 可测函数 ϕ, 应该如何定义 $\phi(A)$ 呢? 方法是构造一族有界的可测函数

$$\phi_n(\lambda) = \begin{cases} \phi(\lambda), & |\phi(\lambda)| \leqslant n \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

然后用一族有界算子 $A_n = \phi_n(A)$ 来逼近 $\phi(A)$. 这样所得到的

$$\phi(A) = \int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda) \mathrm{d}E_\lambda$$

是一个无界闭算子, 并且其定义域为

$$D_\phi = \{x \in H : \int_{\mathbb{R}} |\phi(\lambda)|^2 \mathrm{d}(E_\lambda x, x) < +\infty\}$$

一个特别的结果是, 对一切 (无界)Borel 可测函数 $\phi(\lambda)$, D_ϕ 在 H 中稠密. 由此可以得到一个有趣的结果:

设 A 是 Hilbert 空间上的无界自伴算子, 则 $D(A^2)$ 在 H 中稠密, 且 A^2 是自伴的.

对于自伴算子, 设 A 的谱分解为

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \mathrm{d}E_\lambda$$

考察实值函数 $\phi(\lambda) = \lambda^2$, 并定义

$$D_\phi = \{x \in H : \int_{\mathbb{R}} \lambda^4 \mathrm{d}(E_\lambda x, x) < +\infty\}$$

则 $D_\phi = D(A^2)$ 在 H 中稠密. 由 ϕ 是实值函数知 $\phi(A) = A^2$ 是自伴算子.

2.2 自伴算子的扰动

设 A 是一个给定的算子. 如果 B 具有一定的有界性, $A + B$ 是否具有某些类似的性质? 我们引入如下的定义来刻画算子 B 关于 A 的有界性:

设 A, B 是 Hilbert 空间上的无界稠定算子, 且 $D(A) \subset D(B)$. 算子 B 称为 A-有界的, 是指映射

$$B : (D(A), |||\cdot|||) \mapsto (H, \|\cdot\|)$$

是有界的. 换句话说, 存在常数 $a, b > 0$ 使得

$$\|Bx\| \leqslant a\|Ax\| + b\|x\|$$

B 关于 A 的界定义为常数 a 的下确界. 这个定义对常数 b 没有作限制, 因为有界算子的性质是简单的.

算子 B 称为 A-紧的, 是指映射

$$B : (D(A), |||\cdot|||) \mapsto (H, \|\cdot\|)$$

是紧的. 换句话说, 若序列 $(x_n) \subset D(A)$ 使得 $\|x_n\|$ 和 $\|Ax_n\|$ 都是有界的, 则 Bx_n 在 H 中有收敛子列. 算子的紧性能够得到它的有界性:

命题 6.5.7 设 B 是可闭化算子, B 是 A 紧的, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $b_\varepsilon > 0$ 使得

$$\|Bx\| \leqslant \varepsilon \|Ax\| + b_\varepsilon \|x\|, \quad \forall x \in D(A)$$

上述命题在 A 是可闭化算子时也成立. 上述命题意味着 B 关于 A 的界实际上是 0.

算子的闭性 设 B 关于 A 的界小于 1, 则 $A + B$ 是 (可) 闭的当且仅当 A 是 (可) 闭的.

算子的自伴性 算子的自伴性在扰动下的变化是一个重要的命题, 相应的结果被称为 Kato-Rellich 定理.

(Kato-Rellich) 设 H 是 Hilbert 空间, A 是 (本质) 自伴算子, B 是对称算子, B 关于 A 的界 $a < 1$, 则 $A + B$ 是 (本质) 自伴算子.

证明是通过研究 $A + B + \mu i$ 的值域来进行的. 即便是在 $a = 1$ 的情形, 也可以得到 $A + B$ 是本质自伴的.

算子的谱集 一般来说这是比较困难的. 在这里将谱集划分为 $\sigma_d(A)$ 和 $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$. 点谱的扰动参见定理 6.1.18. 本质谱的扰动参见 Weyl 定理:

设 A 是自伴的, B 是对称的, B 是关于 A 是紧的, 则

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A + B) = \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$$

由于 B 是可闭的且关于 A 的界小于 1, 故 $A + B$ 实际上是自伴算子.jk 这些性质用来研究 Schrödinger 算子的谱时非常有用.

2.3 一般闭算子的谱集分类

设 T 是 Hilbert 空间 H 上的闭算子, 则 T 的预解集定义为

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ 是 } D(T) \text{ 到 } H \text{ 的一一对应}\}$$

其余集 $\sigma(T)$ 称为 T 的谱集. 当 $\lambda \in \sigma(T)$ 时, $\lambda I - T$ 不是一一对应, 它要么不是单射, 要么不是满射. 一般的, 谱集有如下分类:

- 点谱 $\sigma_p(T)$: $N(\lambda I - T) \neq 0$, 即 $\lambda I - T$ 不是单射;
- 连续谱 $\sigma_c(T)$: $N(\lambda I - T) = 0$, 且 $\overline{R(\lambda I - T)} = H$. 此时 $(\lambda I - T)^{-1}$ 是一个 $R(\lambda I - T)$ 到 $D(T)$ 的一一对应, 且是稠定的.
- 剩余谱 $\sigma_r(T)$: $N(\lambda I - T) = 0$, 且 $\overline{R(\lambda I - T)} \neq H$. 此时 $(\lambda I - T)^{-1}$ 不是稠定的.

2.3.1 无界自伴算子的谱族刻画

当 T 是一个自伴算子时, 其谱集具有特殊的结构, 并且可以通过谱族来刻画.

- 点谱 $\sigma_p(T)$: $\lambda \in \sigma_p(T)$ 当且仅当 $E(\{\lambda\}) \neq 0$.
- 剩余谱 $\sigma_r(T)$: $\sigma_r(T) = \emptyset$.
- 谱 $\sigma(T)$: $\lambda \in \sigma(T)$ 当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$, $U(\lambda, \varepsilon) \cap \sigma(T) \neq \emptyset$.

这里一个有趣的结果是 $\sigma_r(T) = \emptyset$. 换句话说, 对一切 $\lambda \notin \sigma_p(T)$, 都有 $\overline{R(\lambda I - T)} = H$.

2.3.2 无界自伴算子的算子刻画

仍然假设 T 是一个自伴算子.

- 离散谱 $\sigma_d(T)$: $\lambda \in \sigma_p(T)$ 且 $\dim N(\lambda I - T) < +\infty$. 即离散谱是有限几何重数的特征值.
- 本质谱 $\sigma_{\text{ess}}(T)$: 离散谱的余集.

本质谱有以下简单的刻画: (Weyl 判别准则)

$\lambda \in \mathbb{C}$ 在本质谱中当且仅当存在序列 (x_n) 使得 $\|x_n\| = 1$ 而

$$(\lambda I - T)x_n \to 0$$

本质谱 $= \infty$ 重特征值 $+$ 谱集的聚点

3 算子半群

3.1 无穷小生成元

我们主要考虑强连续的算子半群和无穷小生成元的关系. $T(t)$ 称为强连续的算子半群, 如果

1. $T(0) = I$;
2. $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geqslant$;
3. $\lim_{t\to 0} \|T(t)x - x\| = 0$.

前两条说明 $T(t)$ 的确是一个半群, 第三条说明 T 是连续的. 下面考虑从 $T(t)$ 出发定义它的无穷小生成元 A, 即形式上有

$$T(t) = \exp(tA), \quad \forall t \geqslant 0$$

注意: 这里出现的 $\exp(tA)$ 的确只是形式上的表示, 因为 A 并非一定是自伴的算子, 因此算子函数 $\exp(tA)$ 无法被定义. 我们的任务包括:

(i) 从强连续算子伴群 $T(t)$ 出发定义无穷小生成元 A;

(ii) 从无穷小生成元 A 出发定义算子半群 $T(t)$.

这其实是 Hille-Yosida 定理要回答的内容. 设 $T(t)$ 是给定的强连续算子半群, 定义

$$A_t = t^{-1}(T(t) - I), \quad \forall t > 0$$

因此可以定义

$$D(A) = \{x \in H : \lim_{t\to 0} A_t x \text{ 在 } H \text{ 中存在}\}$$

接着就可以定义

$$Ax = \lim_{t\to 0} A_t x$$

这样定义的 A 称为无穷小生成元, 则 A 是稠定的闭算子.

- A 是稠定的, 是因为对任何

  $$x_s = \frac{1}{s}\int_0^s T(t)x\mathrm{d}t$$

  有极限

  $$\lim_{r\to 0} A_r x_s = A_s x$$

  成立. 因此 $x_s \in D(A)$. 注意到对任何 $x \in H$, 有

  $$\lim_{s\to 0} x_s = x$$

  故 $D(A)$ 在 H 中稠密. 这个结果也可以得到:

  $$Ax_s = \lim_{r\to 0} A_r x_s = A_s x, \quad \forall s > 0, \quad x \in H$$

  这也就是说, 关于时间 s 的偏移量从 s 转移到了 A 身上.

- A 是闭算子. 设 $x_n \to x$, $Ax_n \to y$, 则可以证明

$$\begin{aligned}
\lim_r A_r x &= \lim_{r,n} A_r x_n \\
&= \lim_{r,n} \frac{1}{r}(T(r) - I)x_n \\
&= \lim_{r,n} \frac{1}{r}\int_0^r T(s)Ax_n \mathrm{d}s \quad \text{(算子的有界性)} \\
&= \lim_r \frac{1}{r}\int_0^r T(s)y \qquad\quad \text{(强连续性)} \\
&= y
\end{aligned}$$

因此, 从任何强连续半群出发都可以定义相应的无穷小生成元 A. 此外还有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \quad \forall x \in D(A)$$

注意到, 对任何 $x \in D(A)$, 有

$$A_r T(t)x = \frac{T(t+r) - T(r)}{r}x = T(t)A_r x$$

因此对任何 $r > 0$, 算子 A_r 和 $T(t)$ 是可以交换的. 令 $r \to 0$, 有 $A_r \to Ax$, 因此

$$\lim_{r\to 0} A_r T(t)x = T(t)Ax$$

故 $T(t)x \in D(A)$, 且

$$AT(t)x = T(t)Ax$$

因此 $T(t)$ 和 A 在 $D(A)$ 上是可以交换的.

尽管无穷小生成元 A 是 Banach 空间 X 上的一个无界算子, 但它是稠定且闭的, 因此具有一些良好的性质. 一般的, 无穷小生成元有两种有用的刻画方式:

- 当 A 和 $T(t)$ 同时出现时, 有 $AT(t) = T(t)A$, 且

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

  对一切 $x \in D(A)$ 成立. 一般的, 当 $x \notin D(A)$ 时, $T(t)x$ 对时间 t 的导数未必存在.

- 当 A 单独出现时, 按照定义, 对 $x \in D(A)$ 有

  $$Ax = \lim_{r\to 0} A_r x$$

算子半群和算子微分方程的解有密切联系. 设 A 是强连续算子半群 $T(t)$ 的无穷小生成元, 则微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = Ax(t) \\ \quad x(t) = x_0 \in D(A) \end{cases}$$

在 $C(\mathbb{R}^+, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, X)$ 中有唯一的解

$$x(t) = T(t)x_0, \qquad \forall t \geqslant 0$$

注意 $T(t) : D(A) \mapsto D(A)$, 故 $x(t) \in D(A)$ 恒成立. 接着,

$$T(t)x_0 = x_0 + \int_0^t AT(s)x_0 \mathrm{d}s \Longrightarrow x(t) = x_0 + \int_0^t Ax(s)\mathrm{d}s$$

故 $x(t)$ 的确是微分方程的解. 唯一性的证明稍微复杂一点.

3.2 压缩半群的刻画

现在假设 $T(t)$ 是一个压缩半群. 形式上, 当 $\operatorname{Re}\lambda > 0$ 时, 可以定义积分

$$R_\lambda(A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\mathrm{d}t$$

此时还有

$$\|R_\lambda(A)\| \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$$

关于压缩半群的生成元 A, 我们有如下定理:

(Hille-Yosida) 为了一个线性稠定算子 A 是一个压缩半群的生成元, 必须且仅须

1. $(0, +\infty) \subset \rho(A)$;
2. $\|R_\lambda(A)\| \leqslant 1/\lambda$, $\forall \lambda > 0$.

也就是说, A 的预解算子和 $T(t)$ 的 Laplace 变换一一对应. 当 A 是压缩半群的生成元时, $T(t)$ 还有如下的表示:

$$T(t) = \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n}$$

注意, 这样的算子可以被定义是因为 $(0, +\infty) \subset \rho(A)$, 因此

$$(I - tA)^{-1} : H \mapsto D(A)$$

总是一个连续线性算子.

3.3 无穷小生成元的例子

考虑 Banach 空间

$$X = \{u \in C[0,+\infty) : \lim_{x\to+\infty} u(x) = 0\}$$

其上的模定义为

$$\|u\| = \sup_{x\in[0,+\infty)} |u(x)|$$

考虑平移算子

$$T(t) : u(x) \mapsto u(x+t)$$

则 $T(t)$ 是一个强连续压缩半群. 它的生成元为何?

对于 $u \in X$, 极限

$$\lim_{t\to0} A_t u(x) = \lim_{t\to0} \frac{u(x+t)-u(x)}{t}$$

在 X 中存在要求对任何 $x \in [0,+\infty)$, 极限

$$\frac{u(x+t)-u(x)}{t}$$

存在, 从而 $u(x)$ 是可导函数, 且

$$\lim_{t\to0} A_t u(x) = u'(x)$$

因此

$$D(A) = \{u \in X : u' \in X\}$$

从 A 出发也可以构造相应的算子半群.

下面的例子是关键的. 设 A 是 Hilbert 空间 H 上的一个正自伴算子, 则 $-A$ 一定是某个压缩半群的无穷小生成元. 首先我们来验证无穷小生成元的判定准则. 因为 A 是自伴的, 因此 $\sigma(-A) \subset [0,+\infty]$. 从而

$$(0,+\infty) \subset \rho(-A)$$

下面再来验证: 对任何 $\lambda > 0$, 有

$$\left\|(\lambda I + A)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

由于 $(\lambda I + A)^{-1} : H \mapsto D(A)$ 是一一映射, 因此等价于

$$\|(\lambda I + A)x\| \geqslant \lambda\|x\|, \quad \forall x \in D(A)$$

这是显然成立的. 事实上, A 对应的强连续算子半群可以通过 A 的谱分解构造出来. 设

$$A = \int_0^\infty \lambda \mathrm{d}E_\lambda$$

则可以定义

$$T(t)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathrm{d}E_\lambda$$

我们可以这样理解 $T(t)$ 的含义: 对给定的 $x\in H$, 首先计算它的投影 $E_\lambda x$, 然后对相应的向量乘以 $e^{-\lambda t}$. 显然 $T(t)$ 满足

$$\|T(t)\|\leqslant \sup_{\lambda\geqslant 0} e^{-\lambda t}\leqslant 1$$

下面我们来验证 $T(t)$ 构成一个强连续的算子半群.

- $T(0)=I$. 这是显然的.
- $T(t+s)=T(t)T(s)$. 对于 $x\in H$, 有

$$\begin{aligned}
T(t)T(s)x&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathrm{d}E_\lambda\left(\int_0^\infty e^{-\mu s}\mathrm{d}E_\mu x\right)\\
&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathrm{d}E_\lambda\left(e^{-\lambda s}E_\lambda x\right)\\
&=\int_0^\infty e^{-\lambda(s+t)}\mathrm{d}E_\lambda x\\
&=T(t+s)
\end{aligned}$$

  因此 $T(t)$ 是算子半群.

- 对任何 $x\in H$, 有 $\lim\limits_{t\to 0}\|T(t)x-x\|=0$. 注意到

$$x-T(t)x=\int_0^\infty(1-e^{-\lambda t})\mathrm{d}E_\lambda x$$

  定义函数

$$f_t(\lambda)=\min\{\lambda t,1\}\leqslant 1$$

  则

$$\|x-T(t)x\|^2\leqslant\int_0^\infty|f_t(\lambda)|^2\mathrm{d}(E_\lambda x,x)$$

  注意到, 当 $t\to 0$ 时, $f_t(\lambda)$ 逐点收敛到 0, 因此由控制收敛定理

$$\lim_{t\to 0}\|x-T(t)x\|^2=0$$

  故 $T(t)$ 是强连续的.

综合以上结果, $T(t)$ 是一个压缩半群. 例子: 考察无界算子

$$-\Delta: H^2(\mathbb{R}^n)\mapsto L^2(\mathbb{R}^n)$$

则 $-\Delta$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的正自伴算子, 故方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

对于初始值 $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$ 有唯一的解

$$u(x,t) \in C(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^n))$$

并且相应的压缩半群 $T(t) = \exp(t\Delta)$ 的积分核为

$$G(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0$$

即

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t) u_0(y) \mathrm{d}y$$

对于有界区域的情形是类似的. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界区域, 且边界光滑. 考察无界算子

$$-\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$$

则 $-\Delta$ 是 $L^2(\Omega)$ 上的自伴算子, 从而

$$T(t) = \exp(t\Delta)$$

是压缩半群. 此时 $T(t)$ 的表达式需要通过 $-\Delta$ 的特征分解来表示.

4 习题

1. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的自伴算子. 证明: T 只有离散谱当且仅当 T 有紧预解算子.

证明 若 T 有紧预解算子, 即假设 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $(\lambda_0 I - T)^{-1} : H \mapsto D(T)$ 是紧算子, 我们来证明 T 只有离散谱. 注意到, 当 $\lambda \neq \lambda_0$ 时,

$$\lambda \in \rho(T) \Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda_0 - \lambda} \in \rho\Big((\lambda_0 I - T)^{-1}\Big)$$

这是因为,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda_0-\lambda}\in\rho\Big((\lambda_0 I-T)^{-1}\Big)\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{\lambda_0-\lambda}I-(\lambda_0 I-T)^{-1}\text{是 } H\mapsto H \text{ 的一一映射}\\
\Longleftrightarrow\ &(\lambda_0 I-T)-(\lambda_0-\lambda)I\text{是 } D(T) \text{ 到 } H \text{ 的一一映射}\\
\Longleftrightarrow\ &\lambda I-T\text{是 } D(T) \text{ 到 } H \text{ 的一一映射}\\
\Longleftrightarrow\ &\lambda\in\rho(T)
\end{aligned}
$$

因此, T 的谱集 $\sigma(T)$ 通过映射 $\lambda\mapsto 1/(\lambda_0-\lambda)$ 一一对应于 $\sigma((\lambda_0 I-T)^{-1})\backslash\{0\}$. 由于 $\sigma((\lambda_0 I-T)^{-1})$ 除 0 外均为有限重数的孤立点谱, 因此 T 只包含有限重数的孤立点谱. 这恰好是离散谱的判定准则, 因此 $\sigma(T)=\sigma_d(T)$.

若 T 只有离散谱, 考察 T 的自伴分解

$$
T=\int_{\sigma(T)}\lambda\mathrm{d}E(\lambda)
$$

其中 $E(\cdot)$ 是 $\sigma(T)\subset\mathbb{R}$ 上的一个算子值测度, 是 T 对应的谱族. 由于 T 仅有有限重数的孤立点谱, 故 $\sigma(T)$ 是孤立点集, $E(\cdot)$ 是 $\sigma(T)$ 上的 Dirac 测度. 当 $\lambda\in\sigma(T)$ 时,

$$
R(E(\{\lambda\}))=N(\lambda I-T)\Longrightarrow\dim R(E(\{\lambda\}))<+\infty
$$

因此 $E(\{\lambda\})$ 一定是一个有限秩的算子.

下面考察 T 的预解算子. 取定实数 $\lambda_0\in\rho(T)$, 设

$$
d=\mathrm{dist}(\sigma(T),\lambda_0)>0
$$

对任何 $n\in\mathbb{N}$, 考察算子

$$
K_n=\int_{|\lambda|\leqslant n}\frac{1}{\lambda_0-\lambda}\mathrm{d}E(\lambda),\qquad K=\int_{\sigma(T)}\frac{1}{\lambda_0-\lambda}\mathrm{d}E(\lambda)
$$

注意到 $f(\lambda)=1/(\lambda_0-\lambda)$ 是 $\sigma(T)$ 上的有界 Borel 可测函数, 因此

$$
K=(\lambda_0 I-T)^{-1}
$$

是 H 上的有界算子, 也恰好是 T 的预解算子. 下面来证明 K 是紧算子. 我们需要

1. 对任何 $n\in\mathbb{N}$, K_n 是有限秩的算子.

   注意 $\sigma(T)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的孤立点集, 因此对任何正整数 n, $\{|\lambda|\leqslant n\}\cap\sigma(T)$ 是一个有限集. 于是此时 K_n 是一些有限秩算子的线性组合, 因此 K_n 也是有限秩的.

2. $\lim_{n\to\infty}\|K_n - K\| = 0$. 对任意 $x \in H$, 我们有

$$(K - K_n)x = \int_{|\lambda|>n} \frac{1}{\lambda_0 - \lambda} \mathrm{d}E(\lambda)x$$

故

$$\begin{aligned}
\|(K - K_n)x\|^2 &\leqslant \int_{|\lambda|>n} \frac{1}{|\lambda_0 - \lambda|^2} \mathrm{d}\|E(\lambda)x\|^2 \\
&\leqslant \frac{1}{d^2} \int_{|\lambda|>n} \mathrm{d}(E(\lambda)x, x) \\
&= \frac{1}{d^2}(E(\{|\lambda| > n\})x, x) \\
&\leqslant \frac{1}{d^2}\|E(\{|\lambda| > n\})\|\|x\|^2
\end{aligned}$$

从而

$$\|K - K_n\|^2 \leqslant \frac{1}{d^2}\|E(\{|\lambda| > n\})\|$$

当 $n \to \infty$ 时, 投影算子 $E(\{|\lambda| > n\})$ 在强意义下收敛到 0, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\|K_n - K\| = 0, \quad \forall x \in H$$

综合以上结果可知, $K = (\lambda_0 I - T)^{-1}$ 是有限秩算子 K_n 的强极限. 因此 K 是紧算子. 评注:

1. 当 T 是自伴算子时, 算子 T 和预解算子 $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ 的谱集 $\sigma(\cdot)$ 和点谱 $\sigma_p(\cdot)$ 之间存在一一对应关系. 谱集 $\sigma(\cdot)$ 的对应本质上是预解集 $\rho(\cdot)$ 的对应.
2. 离散谱 $\sigma_d(T)$ 是点谱 $\sigma_p(T)$ 的一个子集. 当 $\lambda \in \sigma_d(T)$ 时, λ 时一个孤立点谱, 并且 λ 的几何重数为有限, 即

$$\dim N(\lambda I - T) < +\infty$$

3. 以上结果揭示了有紧预解算子的无界算子具有特殊的谱结构: 所有的谱都是离散谱!

2. 设 $T(t)$ 是 X 上强连续算子半群, A 是无穷小生成元, 则下面的三个条件等价:

(1) $D(A) = X$;

(2) $\lim_{t\to 0}\|T(t) - I\| = 0$;

(3) $A \in L(X)$, 且 $T(t) = \exp(tA)$.

上面这些条件实际上就是在说 A 是 X 上的有界算子, 从而 $T(t)$ 有指数表示, 并且有算子意义下的连续性.

证明 其中最麻烦的部分是 (2) 到 (3), 也就是当已知 $T(t)$ 的连续性的时候, 如何得到 A 的有界性. 首先选择一个充分小的 r, 使得

$$\left\|\frac{1}{r}\int_0^r T(t)\mathrm{d}t - I\right\| < 1$$

于是对于这个 r, 算子

$$\int_0^r T(t)\mathrm{d}t$$

是可逆的. 于是

$$\begin{aligned}\frac{T(s)-I}{s} &= \left(\int_0^r T(t)\mathrm{d}t\right)^{-1}\left(\frac{1}{s}\int_s^{s+r} T(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{s}\int_0^r T(t)\mathrm{d}t\right) \\ &= \left(\int_0^r T(t)\mathrm{d}t\right)^{-1}\left(\frac{1}{s}\int_r^{s+r} T(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{s}\int_0^s T(t)\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

现在固定 r 并让 $s \to 0$, 得到

$$\lim_{s\to 0} A_s = \left(\int_0^r T(t)\mathrm{d}t\right)^{-1}\Big(T(r) - T(0)\Big)$$

因此 A_s 的极限 A 存在, 并且此时有

$$A = \left(\int_0^r T(t)\mathrm{d}t\right)^{-1}\Big(T(r) - T(0)\Big)$$

这是一个有界线性算子.