

数学分析习题课教案

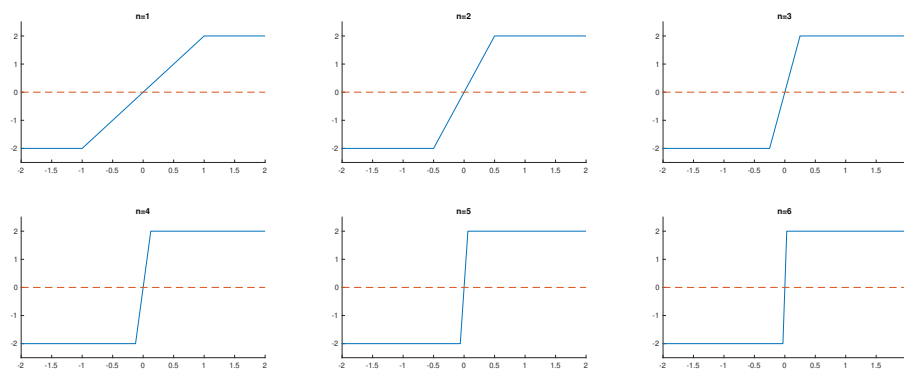
叶胥达 741317822@qq.com

2023年9月25日

1 习题解答

20230918

1. 观察 $n = 1, \dots, 6$ 时 $f^{(n)}(x)$ 的图像:



定义限制函数

$$R(x) = \begin{cases} -2, & x \leq -2 \\ x, & -2 \leq x < 2 \\ 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

即 $R(x)$ 的作用是将 $f(x) = x$ 的值域限制在区间 $[-2, 2]$ 上. 下面用数学归纳法证明 (写成分段函数也可以):

$$f^{(n)}(x) = R(2^n x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

当 $n = 1$ 时, $f(x) = R(2x)$ 成立. 下面只需证明:

$$R(2R(2^n x)) = R(2^{n+1}x), \quad x \in \mathbb{R}$$

由于左右均为奇函数, 只需考虑 $x \geq 0$ 的情形.

- 若 $x \leq \frac{1}{2^n}$, 则 $2^n x \leq 1$, 故

$$R(2^n x) = 2^n x \implies 2R(2^n x) = 2^{n+1} x \leq 2$$

故 $R(2R(2^n x)) = 2^{n+1} x = R(2^{n+1} x)$.

- 若 $x > \frac{1}{2^n}$, 则 $2^{n+1} x > 2 \implies R(2^{n+1} x) = 2$. 而

$$2^n x > 1 \implies R(2^n x) > 1 \implies R(2R(2^n x)) \geq R(2) = 2$$

但 $R(\cdot) \leq 2$, 故 $R(2R(2^n x)) = 2$.

2. 令 $t = x + \frac{1}{x} \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. 故

$$f(t) = t^2 - 2, \quad t \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty).$$

3. 注意等号成立的条件: $a = 0, b = -\frac{1}{2}$. 由于 $f(0) = b, f(1) = 1 + a + b, f(-1) = 1 - a + b$,

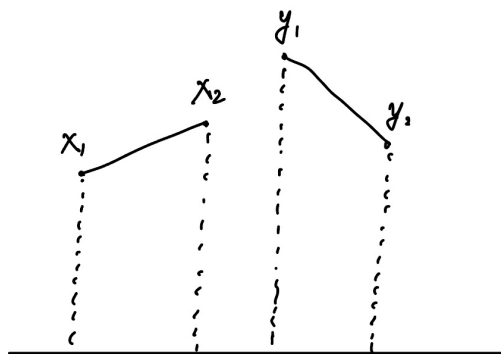
$$2|f(0)| + |f(1)| + |f(-1)| \geq (1 + a + b) + (1 - a + b) - (2b) = 2.$$

20230920

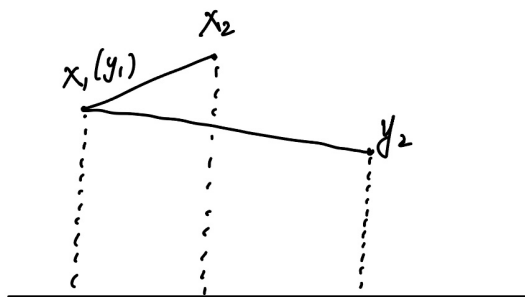
1. 2. 略.

3. (证明一) 必要性显然. 为证充分性, 使用反证法. 若 $f(x)$ 在 E 上不是单调的, 则存在 $x_1 < x_2$ 使得 $f(x_1) < f(x_2)$, 及 y_1, y_2 使得 $f(y_1) > f(y_2)$. 作图并分类讨论:

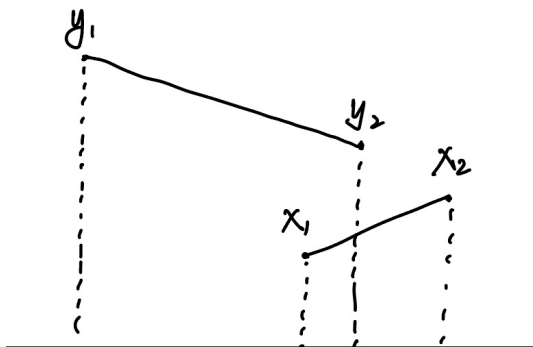
- 若 $y_1 > x_1$, 则 $f(y_1) > f(x_1)$. 于是 $f(x_1) < f(y_1) > f(y_2)$ 不符要求.



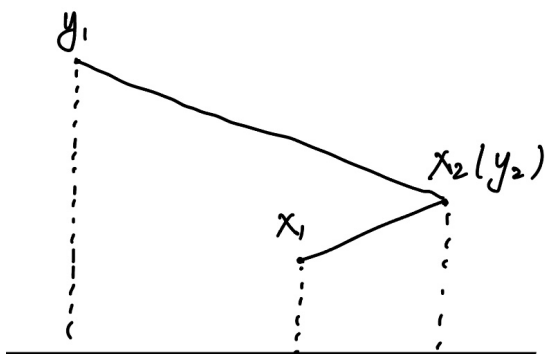
- 若 $x_1 = y_1$, 则 $f(x_2) > f(x_1) = f(y_1) > f(y_2)$ 不符合要求.



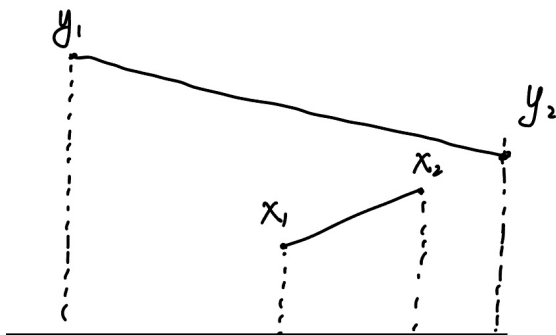
- 若 $y_2 < x_2$, 则 $f(y_2) < f(x_2)$. 于是 $f(y_1) > f(y_2) < f(x_2)$ 不符合要求.



- 若 $y_2 = x_2$, 则 $f(y_1) > f(y_2) = f(x_2) > f(x_1)$ 不符合要求.



- 若 $y_1 < x_1$ 且 $y_2 > x_2$, 则 $f(x_1) \leq f(y_1)$ 和 $f(y_2) \leq f(x_2)$ 中至少有一个成立, 仍不符合要求.



(证明二) 任取 E 中两数 $a < b$, 不妨设 $f(a) < f(b)$. 容易看出,

- 当 $x < a$ 时, 有 $f(x) < f(a)$;
- 当 $a < x < b$ 时, 有 $f(a) < f(x) < f(b)$;
- 当 $x > b$ 时, 有 $f(x) > f(b)$.

因此, a, b 两数将 E 分为三个集合:

$$E_- = (-\infty, a] \cap E, \quad E_0 = (a, b) \cap E, \quad E_+ = [b, +\infty) \cap E,$$

且 $f(x)$ 在 E_-, E_0, E_+ 上的函数值依次增大.

下面我们来证明 $f(x)$ 在 E 上是严格单调递增的, 也即对满足 $x < y$ 的两数, 总有 $f(x) < f(y)$.

反之, 若有 $f(x) \geq f(y)$, 则 x, y 必同属于 E_-, E_0, E_+ 之一. 因此可进行如下分类讨论:

- 若 $x, y \in E_-$, 则对 (x, y, a) 三数应用条件可知 $f(x) < f(y) < f(a)$, 矛盾.
- 若 $x, y \in E_0$, 则对 (a, x, y) 三数应用条件可知 $f(a) < f(x) < f(y)$, 矛盾.
- 若 $x, y \in E_+$, 则对 (b, x, y) 三数应用条件可知 $f(b) < f(x) < f(y)$, 矛盾.

(证明三, 张卓然) 根据条件, 对任何 E 中的三不同的数 x_1, x_2, x_3 , 有

$$(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) \cdot (x_2 - x_3)(f(x_2) - f(x_3)) > 0.$$

因此, 对任何 E 的两数 $x < y$,

$$(x - y)(f(x) - f(y))$$

均同号. 因此 $f(x)$ 一定在 E 上单调.

4. 此题有多个证明方法. 令 $f(x) = \sin(x^2 + x)$.

(证明一) $f'(x) = (2x + 1) \cos(x^2 + x)$ 无界, 因此 $f(x)$ 不是周期函数.

(证明二) 设 $f(x)$ 的周期为 $T > 0$, 则 $f(T) = \sin(T^2 + T) = 0$ 且 $f(2T) = \sin(4T^2 + 2T) = 0$. 于是存在正整数 k_1, k_2 使得

$$T^2 + T = k_1\pi, \quad 4T^2 + 2T = k_2\pi \implies \frac{2T+1}{T+1} = \frac{k_2}{k_1} \in \mathbb{Q},$$

故 T 是有理数. 但 $T^2 + T = k_1\pi$ 是无理数 (此处未证明), 矛盾.

(证明三) 如果 $f(x)$ 以 $T > 0$ 为周期, 则

$$\sin(x^2 + x) = \sin((x+T)^2 + x + T), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

根据和差化积公式, 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} & \sin((x+T)^2 + x + T) - \sin(x^2 + x) \\ &= 2 \sin\left(\frac{T^2}{2} + Tx + \frac{T}{2}\right) \cos\left(x^2 + Tx + \frac{T^2}{2} + x + \frac{T}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

注意到, 在上式中

$$\sin\left(\frac{T^2}{2} + Tx + \frac{T}{2}\right) = 0 \iff \frac{T^2}{2} + Tx + \frac{T}{2} = k\pi \text{ 对某个 } k \in \mathbb{Z} \text{ 成立},$$

因此可定义上述方程的零点集合

$$E := \left\{ \frac{k\pi}{T} - \frac{T+1}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

于是当 $x \notin E$ 时, 总有

$$g(x) := \cos\left(x^2 + Tx + \frac{T^2}{2} + x + \frac{T}{2}\right) = 0.$$

但由于 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是连续函数, 因此一定有 $g(x) \equiv 0$. 然而由于函数

$$x^2 + Tx + \frac{T^2}{2} + x + \frac{T}{2}$$

没有上界, 故 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的上下确界分别为 ± 1 , 导出矛盾.

5. 对任意 $\varepsilon > 0$, 取正整数 $N \geq 1/\sqrt{\varepsilon}$. 则当正整数 $n > N$ 时, 总有

$$0 < \frac{n}{n^3 + 1} \leq \frac{n}{n^3} < \frac{1}{N^2} < \varepsilon,$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3 + 1} = 0.$$

6. 对任意 $\varepsilon > 0$, 取正整数 $N \geq \max\{4, \frac{32}{3\varepsilon}\}$. 则当 $n > N$ 时, 由

$$\frac{n}{n-3} \leq 4, \quad \frac{n}{n-2} \leq 2, \quad \frac{n}{n-1} \leq \frac{4}{3}$$

可以得到

$$0 < \frac{n^3}{n!} \leq \frac{n^3}{(n-3)(n-2)(n-1)n} \leq 4 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{n} < \frac{32}{3N} \leq \varepsilon.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n!} = 0.$$

2 补充习题

定义 1 称 $x \in \mathbb{R}$ 是代数数, 如果存在正整数 n 和有理数 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}$ 使得

$$a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = 0.$$

即: 代数数是有理系数多项式零点的集合.

证明: 代数数是可数集. (利用 n 次多项式在 $\mathbb{R}$ 上至多有 n 个不同零点)

注意如下结果: 若 A_n 是至多可数集, 则 $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是至多可数集.

(证明) 定义集合

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ 是某 } n \text{ 次有理系数多项式的根}\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

则代数数集为全体 A_n 的并集. 要证代数数集是可数集, 只需证明每个 A_n 是至多可数集.

对给定的 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}$, 定义集合

$$B_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \{x \in \mathbb{R} : a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n\},$$

则

$$A_n = \bigcup_{(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{Q}^n} B_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}),$$

由于 $\mathbb{Q}^n$ 是可数集, $B_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ 的元素个数不超过 n (代数基本定理/一元多项式), 故 A_n 为至多可数集, 结论得证.

定义 2 称数集 A 在数集 E 中稠密, 如果对任意 $x \in E$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在 $y \in A$ 使得 $|x - y| < \varepsilon$.

根据定义, 若函数 $f(x)$ 在 E 上连续, 且在 A 上恒等于 0, 则在 E 上恒等于 0.

证明: (1) 若 B 在 A 中稠密, A 在 E 中稠密, 则 B 在 E 中稠密.

(2) $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密;

(3) 若单调递增数列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+1} - S_n) = 0,$$

则对任何 $T > 0$, $S_n \bmod T$ 在 $[0, T]$ 中稠密.

(证明) 由于开区间 $(0, T)$ 在 $[0, T]$ 中稠密, 故只需证明: 对任何 $x \in (0, T)$, 存在 $M \in \mathbb{N}$ 使得

$$|S_M \bmod T - x| < \varepsilon. \quad (*)$$

为证明 $(*)$ 成立, 首先取 $N \in \mathbb{N}$ 使得: 对任意 $n \geq N$, 都有

$$|S_{n+1} - S_n| < \min\{x, \varepsilon\}. \quad (**)$$

且假设 $kT \leq S_N < (k+1)T$ 对某个 $k \in \mathbb{Z}$ 成立. 下面考察两种情形:

- 若 $S_N \bmod T < x$ 即 $S_N < kT + x$, 则可取整数

$$M = \min\{n > N : S_n \geq kT + x\},$$

则此时

$$|S_M \bmod T - x| \leq S_M - S_{M-1} < \varepsilon,$$

因此 M 即为使得 $(*)$ 成立的正整数.

- 若 $S_N \bmod T \geq x$ 即 $S_N \geq kT + x$, 则可取整数

$$N_1 = \min\{n > N : S_n \geq (k+1)T\}.$$

容易看出此时

$$S_{N_1} \bmod T \leq S_{N_1} - S_{N_1-1} < x,$$

并且对任意 $n \geq N_1$ 都有不等式 $(**)$ 成立. 此时可用整数 N_1 代替 N 并回到第一种情形.

综上, $S_n \bmod T$ 在 $[0, T]$ 中稠密.

例 若 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $f(x)$ 有最小正周期 1, 则 $f(x^2)$ 不为周期函数.

(证明) 否则, 设 $g(x) = f(x^2)$ 是以 T 为周期的函数, 则对任何正整数 n ,

$$f(0) = f(n) \implies g(0) = g(\sqrt{n} \bmod T).$$

由于 $\sqrt{n} \bmod T$ 在 $[0, T]$ 上稠密, 我们有

$$g(0) = g(x), \quad \forall x \in [0, T].$$

再由于 $g(x)$ 以 T 为周期函数可得 $g(x) = f(x^2)$ 为常数函数. 于是我们得到

$$f(x) = f(0), \quad \forall x \geq 0.$$

然而, $f(x)$ 以 1 为周期意味着 $f(x)$ 恒为常数, 这与 $f(x)$ 有最小正周期矛盾.

推广 若 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $f(x)$ 有最小正周期 1, $\mathbb{R}$ 上的可微函数 $g(x)$ 满足

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = +\infty,$$

则 $f(g(x))$ 不为周期函数.

(证明) 由条件可知 $g(x)$ 单调递增至 $+\infty$, 因此对充分大的 $n \in \mathbb{N}$, 可以定义

$$S_n = \max\{x \in \mathbb{R} : g(x) = n\}.$$

下面来证明:

- $S_n \leq S_{n+1}.$

由于 $g(S_n) = n < n+1$, 因此在 $(S_n, +\infty)$ 上有 $g(x) = n+1$ 的根, 从而 $S_{n+1} \geq S_n$.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty.$

对每个 $N \in \mathbb{N}$, $S_{g(N)} \geq N$. 由于 $g(N)$ 随着 N 增大发散到 $+\infty$, 可知 S_n 有一子列随着 n 增大发散到 $+\infty$. 但是 S_n 单调递增, 故 S_n 本身发散到 $+\infty$.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+1} - S_n) = 0.$

若此结论不对, 则存在正整数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$S_{n_k+1} - S_{n_k} \geq \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

由 Lagrange 中值定理, 存在 $a_k \in (S_{n_k}, S_{n_{k+1}})$ 使得

$$g'(a_k) = \frac{g(S_{n_{k+1}}) - g(S_{n_k})}{S_{n_{k+1}} - S_{n_k}} = \frac{(n_k + 1) - n_k}{S_{n_{k+1}} - S_{n_k}} \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

但由于 a_k 随着 k 增大发散到 $+\infty$, 因此

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g'(a_k) = \lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = +\infty,$$

产生矛盾.

后面的证明与前例相同.

注 上述结果可直接导出 $\sin(x^2 + x)$ 不是周期函数.

(4) 对任何 $r \notin \mathbb{Q}$, $\{(a + br) \bmod 1 : a, b \in \mathbb{Z}\}$ 在 $[0, 1]$ 中稠密;

(证明) 一般的, 可以证明 $\{a + br : a, b \in \mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密. 该结果的证明请直接参见¹.

¹<https://math.stackexchange.com/questions/1348086>