

数学分析习题课教案

叶胥达 741317822@qq.com

2023年10月9日

1 习题解答

20230925

1. 注意到对任何正整数 n ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right),$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = 0.$$

2. 记 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k}$, 则

$$\begin{aligned} S_n &= 2S_n - S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} \\ &= \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{2^k} \right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k-1}{2^k} + \frac{2n-1}{2^n} \right) \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} - \frac{2n-1}{2^n} \\ &= 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) - \frac{2n-1}{2^n} \\ &= 3 - \frac{2n+3}{2^n}. \end{aligned}$$

因此可以得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k} = 3.$$

3. 令 $a_n = 1 - \frac{1}{1+2+\cdots+n}$, 则

$$a_n = 1 - \frac{2}{n(n+1)} = \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+2}{n+1}.$$

于是

$$a_2 \cdots a_n = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \times \prod_{k=2}^n \frac{k+2}{k+1} = \frac{1}{n} \times \frac{n+2}{3},$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_2 \cdots a_n = \frac{1}{3}.$$

4. 与第2题的证明方法类似, 故略去. 当 $|a| < 1$ 时该求和收敛.

5. 对任何正整数 n , 有 $0 \leq a - x_n \leq y_n - x_n$. 由于 $y_n - x_n$ 收敛到 0, 因此由夹逼准则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a - x_n = 0.$$

类似的, 从

$$0 \leq y_n - a \leq y_n - x_n$$

可以得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n - a = 0.$$

6. 容易计算

$$\left| \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n^2}{n+1} \right| \leq \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n} = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}},$$

由于 $1/n^{\frac{1}{3}}$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时收敛到 0, 因此

$$\frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n^2}{n+1} = 0.$$

7. 先证明: 对任意 $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, 有

$$|\max\{x, y\} - \max\{a, b\}| \leq \max\{|x - a|, |y - b|\}. \quad (1)$$

事实上, 由于

$$x - \max\{a, b\} \leq x - a \leq |x - a|$$

和

$$y - \min\{a, b\} \leq y - b \leq |y - b|$$

即可得到

$$\max\{x, y\} - \max\{a, b\} \leq \max\{|x - a|, |y - b|\}. \quad (2)$$

由对称性, 也可以得到

$$\max\{a, b\} - \max\{x, y\} \leq \max\{|x - a|, |y - b|\}. \quad (3)$$

结合 (2)(3) 即可得到 (1) 成立. 如果在 (1) 中用 $(-x, -y, -a, -b)$ 来代替 (x, y, a, b) , 则可以得到

$$|\min\{x, y\} - \min\{a, b\}| \leq \max\{|x - a|, |y - b|\}. \quad (4)$$

回到原题. 对每个正整数 n , 由于

$$|\max\{x_n, y_n\} - \max\{a, b\}| \leq \max\{|x_n - a|, |y_n - b|\}, \quad (5)$$

且 (5) 的右端在 $n \rightarrow \infty$ 时收敛到 0, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{x_n, y_n\} = \max\{a, b\}.$$

类似地, 从 (4) 出发可以得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min\{x_n, y_n\} = \min\{a, b\}.$$

注: 与 (1) 的对应的 min 的版本并不是

$$|\min\{x, y\} - \min\{a, b\}| \leq \min\{|x - a|, |y - b|\}. \quad (4')$$

8. 容易计算得到

$$\sqrt{n^2 + n} - n \leq \sqrt{n^2 + n + \frac{1}{4}} - n = \frac{1}{2}$$

且

$$\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \geq \frac{n}{\sqrt{n^2 + n + \frac{1}{4}} + n} = \frac{n}{2n + 1} \geq \frac{1}{3},$$

因此我们有

$$3^{\frac{1}{n}} \leq (\sqrt{n^2 + n} - n)^{\frac{1}{n}} \leq 2^{\frac{1}{n}},$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

9. 容易看出, 本题需要比较 $1, x, \frac{x^2}{2}$ 三个数的大小.

- 当 $x \geq 0$ 时, 容易得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \frac{x^{2n}}{2^n}} = \max \left\{ 1, x, \frac{x^2}{2} \right\}.$$

- 当 $-1 < x < 0$ 时, 对 n 充分大时总有 $|x|^n < \frac{1}{2}$, 因此

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \leq \sqrt[n]{1 - |x|^n} \leq \sqrt[n]{1 + x^n + \frac{x^{2n}}{2^n}} \leq \sqrt[n]{1 + |x|^n + \frac{1}{2}} \leq \sqrt[n]{\frac{3}{2}},$$

因此令 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \frac{x^{2n}}{2^n}} = 1.$$

- 当 $x = -1$ 时, 有

$$\sqrt[n]{1 + x^n + \frac{x^{2n}}{2^n}} = \begin{cases} \sqrt[n]{2 + \frac{1}{2^n}}, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{1}{2}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

因此当 $n \rightarrow \infty$ 时有两个子序列极限 1 和 $\frac{1}{2}$. 此时极限不存在.

- 当 $-2 < x < -1$ 时, 对充分大的奇数 n 有

$$1 + x^n + \frac{x^{2n}}{2^n} < 0,$$

因此

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \text{ 为奇数}}} \sqrt[n]{1 + x^n + \frac{x^{2n}}{2^n}} \leq 0.$$

而对偶数 n 总有

$$1 + x^n + \frac{x^{2n}}{2^n} \geq 1,$$

因此

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \text{ 为偶数}}} \sqrt[n]{1 + x^n + \frac{x^{2n}}{2^n}} \geq 1.$$

因此两个子序列拥有不同的下极限, 故极限不存在.

- 当 $x = -2$ 时, 有

$$\sqrt[n]{1+x^n+\frac{x^{2n}}{2^n}}=\begin{cases}\sqrt[n]{1+2\cdot 2^n}, & n \text{ 为偶数,} \\ 1, & n \text{ 为奇数.}\end{cases}$$

因此两个子序列极限分别为 2 和 1, 极限不存在.

- 当 $x < -2$ 时, 当 n 充分大时总有

$$1 < \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{2n}}{2^n}, \quad |x|^n < \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{2n}}{2^n},$$

因此

$$\sqrt[n]{\frac{1}{3}\frac{x^2}{2}} \leq \sqrt[n]{1+x^n+\frac{x^{2n}}{2^n}} \leq \sqrt[n]{\frac{5}{3}\frac{x^2}{2}},$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n+\frac{x^{2n}}{2^n}} = \frac{x^2}{2}.$$

综上, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n+\frac{x^{2n}}{2^n}} = \begin{cases} \max\left\{1, x, \frac{x^2}{2}\right\}, & x > -1 \text{ 或 } x < -2, \\ \text{不存在}, & -2 \leq x \leq -1. \end{cases}$$

10. 由条件可得 $a_{n+2}-a_{n+1}=(a_n+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})$ 收敛, 即 $a_{n+1}-a_n$ 收敛. 再由 $a_{n+1}+a_n$ 收敛即得 a_n 收敛.

20230927

1. 由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}.$$

2. 由 Stolz 定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^2}{n^3-(n-1)^3} = \frac{4}{3}.$$

3. (本题可以直接使用 Stolz 定理) 不妨设 $a = 0$. 设常数 M 满足

$$|a_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$|a_n| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N_0.$$

于是当 $n \geq N_0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k a_k \right| &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{N_0} k |a_k| + \frac{1}{n^2} \sum_{k=N_0+1}^n k |a_k| \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{N_0} k M + \frac{1}{n^2} \sum_{k=N_0+1}^n k \varepsilon \\ &\leq \frac{N_0(N_0+1)M}{2n^2} + \frac{n+1}{2n} \varepsilon. \end{aligned}$$

再取 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{N_0(N_0+1)M}{2N_1^2} \leq \varepsilon$$

则当 $n > \max\{N_0, N_1\}$ 时有

$$\left| \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k a_k \right| \leq 2\varepsilon.$$

由于 ε 可以任意小, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k a_k = 0.$$

4. 先证一个引理: 若正数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a > 0,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a.$$

令 $x_n = \ln a_n$, 则上述命题可等价写为: 若实数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} - x_n = \ln a,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \ln a.$$

上述命题由 Stolz 定理可立即得到.

在原题中, 令 $a_n = \frac{n!}{n^n}$, 则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}.$$

因此由引理得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{e}.$$

5. 不妨设 $l = 0$ 且 $x_0 = 0$. 由 Stolz 公式可得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k(x_k - x_{k-1}) = 0.$$

注意到

$$\sum_{k=1}^n k(x_k - x_{k-1}) = nx_n - \sum_{k=0}^{n-1} x_k,$$

因此有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k = 0.$$

6. 首先, 用数学归纳法证明: $0 < x_n < \frac{1}{A}$ 恒成立. 事实上,

$$\frac{1}{A} - x_{n+1} = \frac{1}{A} - 2x_n + Ax_n^2 = \frac{1}{A}(Ax_n - 1)^2,$$

因此有 $0 < x_{n+1} < \frac{1}{A}$.

其次, 用数学归纳法证明 $x_n < x_{n+1}$. 这是因为

$$x_{n+1} - x_n = x_n(1 - Ax_n) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

因此有 $x_n < x_{n+1}$ 恒成立.

最后, 利用单调收敛定理可以得到 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限存在, 并设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. 于是有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(2 - Ax_n) \Rightarrow x = x(2 - Ax),$$

从而 $x = 0$ 或 $x = \frac{1}{A}$. 显然 $x = 0$ 不符合条件, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{A}$.

7. 该数列的递推公式是 $a_1 = \sqrt{2}$, 且

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

首先, 用数学归纳法证明 $0 < a_n < 2$ 恒成立 (略).

其次, 用数学归纳法证明 $a_{n+1} > a_n$ 恒成立 (略).

最后, 用单调收敛定理说明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在并且等于 2.

8. 取对数,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) \ln \frac{n-2}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) \times \left(-\frac{1}{n-1} \right) = -2,$$

则原极限为 e^{-2} .

9. 取对数,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{1}{n} = +\infty,$$

则原极限为 $+\infty$.

10. 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n^n - (n-1)^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n})^{n-1}} = 1.$$

11. 作数列

$$a_n = \frac{1}{n^n} \prod_{k=1}^n (n+k),$$

则可以验证

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \cdot 2(2n+1),$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{e}.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{4}{e}.$$

12. 已知数列 $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ 单调递增且收敛到 e . 由二项式定理,

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k},$$

因此有

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^k \leq a_n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

因此从右边的不等式可以得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \geq e. \quad (1)$$

另一方面, 给定正整数 $N, M \in \mathbb{N}$, 对任意正整数 $n > \max\{M, N\}$, 有

$$e \geq \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^k \geq \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{N}{M}\right)^N.$$

因此若取 M 满足 $(1 - \frac{N}{M})^N > 1 - \varepsilon$, 则有

$$e \geq (1 - \varepsilon) \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!}.$$

由于上述不等式对任何 $\varepsilon > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}$ 均成立, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq e. \quad (2)$$

由 (1)(2) 即得所证结果.

注 (郭焕琨): (2) 也可以由不等式

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2+n} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

来得到.

2 补充习题

1. 使用 Cauchy 收敛原理说明,

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \ln k}$$

是发散的.

我们将利用如下的不等式: 对所有正整数 n , 有

$$\ln n \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \ln n + 1$$

因此, 当 $n > m \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} x_n - x_m &= \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k \ln k} \\ &\geq \frac{1}{\ln n} \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} \\ &\geq \frac{1}{\ln n} (\ln n - \ln m - 1) \end{aligned}$$

于是, 对任意给定的 $m \in \mathbb{N}$, 总存在一个充分大的 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$x_n - x_m > \frac{1}{2}$$

于是 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 是发散的.

2. 证明: 任意实数列都可以找到单调递增或者递减的子列.

解: 设 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 是给定的实数列. 分情况讨论:

1. 若 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 是无界的, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$ 使得

$$0 < |x_{n_1}| < |x_{n_2}| < \cdots < |x_{n_k}| < \cdots$$

于是, $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$ 的正数子列单调递增, 而负数子列单调递减.

2. 若 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 是有界的, 则由 Weierstrass 定理知存在收敛子列, 故不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. 如果 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 有无穷多项都等于 x^* , 则结论成立. 故可假设 $x_n \neq x^*$ 对 $n \in \mathbb{N}$ 恒成立. 于是对 $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n > x^*$ 或者 $x_n < x^*$.

不妨设存在无穷多个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $x_n > x^*$ 成立, 否则考虑 $-x_n$ 即可. 进一步可以假设 $x_n > x^*$ 恒成立. 下面我们来证明: 若数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ 且 $x_n > x^*$ 恒成立, 则 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 有单调递减的子列.

事实上, 可以归纳构造一系列严格递增的正整数列 $\{n_k\}_{k \geq 1}$ 使得

$$x^* < x_{n_{k+1}} < x_{n_k}, \quad \forall k \geq 1$$

这样得到的子列 $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$ 则是单调递减的.

综上, 原命题得证.

3. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \ln n} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} = 1$$

由 Stoltz 公式, 只需证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n \left(\ln \ln(n+1) - \ln \ln n \right) = 1$$

由于

$$\ln \ln(n+1) - \ln \ln n = \ln \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \sim \frac{\ln(n+1)}{\ln n} - 1 \sim \frac{1}{n \ln n}$$

因此上述结果成立.

4. 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$, 试计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$.

容易验证 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减且收敛到 0, 因此由 Stolz 定理可以得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(1 + a_n)} - \frac{1}{a_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1 + x)} = \frac{1}{2}.$$

其中最后一项极限可以由洛必达法则或泰勒展开得到. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 2$.

5. 给定实数 $x_1, \dots, x_n$, 令 $x_i^{(1)} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, $i = 1, \dots, n$, 其中 $x_{n+1} = x_i$. 归纳地定义

$$x_i^{(k)} = \frac{x_i^{(k-1)} + x_{i+1}^{(k-1)}}{2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

其中 $x_{n+1}^{(k-1)} = x_i^{(k-1)}$. 证明: 对于 $i = 1, \dots, n$ 均成立

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

对每个正整数 k , 定义

$$S^{(k)} = \sum_{i=1}^n (x_i^{(k)})^2,$$

我们来证明 $S^{(k)}$ 是单调递减的. 事实上,

$$\begin{aligned} S^{(k+1)} - S^{(k)} &= \sum_{i=1}^n (x_i^{(k+1)})^2 - \sum_{i=1}^n (x_i^{(k)})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^{(k)} + x_{i+1}^{(k)}}{2} \right)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i^{(k)})^2 \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^{(k)} - x_{i+1}^{(k)}}{2} \right)^2 \leq 0, \end{aligned}$$

因此 $S^{(k)}$ 单调递减且有极限存在. 特别的, 我们有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S^{(k+1)} - S^{(k)} = 0,$$

因此

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} - x_{i+1}^{(k)} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

由于 $\sum_{i=1}^n x_i^{(k)} = \sum_{i=1}^n x_i$ 对所有 k 成立, 因此

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$