数学分析习题课教案

叶胥达 741317822@qq.com

2023 年 10 月 9 日

1 习题解答

20231009

1. 假设 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个闭区间列, 满足 $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 成立, 且

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0.$$

下面希望证明集合

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$$

中包含唯一的元素. 若上述结果不对, 则对每个 $x\in[a_1,b_1]$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $x\notin[a_n,b_n]$, 即

$$x\in I_n:=(-\infty,a_n)\cup(b_n,+\infty).$$

特别的, 我们有 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是闭区间 $[a_1,b_1]$ 的一个开覆盖. 根据有限覆盖定理, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得

$$[a_1,b_1]\subset\bigcup_{n=1}^{N}I_n\Longrightarrow\bigcap_{n=1}^{N}I_n^c\subset(-\infty,a_1)\cup(b_1,+\infty).$$

注意到

$$I_n^c=[a_n,b_n]\Longrightarrow\bigcap_{n=1}^{N}I_n^c=[a_1,b_1],$$

我们得到

$$[a_N,b_N]\subset(-\infty,a_1)\cup(b_1,\infty),$$

此为矛盾的结果.

2. 证明非空有上界的实数集 S 的上确界存在. 设 a_1 比 S 中的某个元素小, b_1 为 S 的一个上界, 从而 a_1 不是 S 的上界. 对每个正整数 n, 假设 a_n 不是 S 的上界, 而 b_n 是 S 的上界, 并考察实数

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

显然, c_n 或是 S 的上界, 或不是 S 的上界.

- 若 c_n 是 S 的上界, 令 $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$;
- 若 c_n 不是 S 的上界, 令 $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$.

如此一来, 我们得到闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, 且

$$(b_{n+1} - a_{n+1}) = \frac{1}{2}(b_n - a_n).$$

根据闭区间套定理, 存在 $a^* \in \mathbb{R}$ 使得

$$\{a^*\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

下面证明 a^* 是集合 S 的上确界.

1. 由于 b_n 是 S 的上界, 因此对任意 $x \in S$, 有

   $$x \leqslant b_n \Longrightarrow x \leqslant \lim_{n \to \infty} b_n = a^*.$$

   因此 a^* 也是 S 的上界.

2. 对任意的 $y < a^*$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $a_n > y$. 由于 a_n 不是 S 的上界, 故 y 也不是 S 的上界. 于是, 任何比 a^* 小的数都不是 S 的上界.

综合以上结果, 可以得到 a^* 是 S 的上确界.

3. 令 $M = \sup E$. 由于 $\max E$ 不存在, 故对任意 $x \in E$, $x < M$. 任取 $x_1 \in E$. 我们使用归纳的方式来构造数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$: 当 $x_n \in E$ 给定时, 可以取 $x_{n+1} \in (x_n, M)$. 按照这种方式构造出的 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 两两互异且收敛到 M.

4. 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 $a^* \in \mathbb{R}$. 如果 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 恒等于 a^*, 则结论显然成立. 下面不妨设 $a_M > a^*$ 对某个 $M \in \mathbb{N}$ 成立, 我们来证明 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上确界是可以取到的. 事实上, 设正整数 $N > M$ 使得 $a_n < \frac{a^* + a_1}{2}$ 对 $n > N$ 恒成立. 于是, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上确界一定在有限集合 $\{a_n\}_{n=1}^{N}$ 中取到.

20231011

1. **(证明一)** 根据 Weierstrass 定理, 由 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界可以得到其子列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛, 并令

$$a^* = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}.$$

把 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 去掉子列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 之后的数列记为 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. 则 $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ 不会收敛到 a^*, 否则 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 将收敛到 a^*. 因此, 存在 $\varepsilon > 0$ 和存在无穷多个 $m \in \mathbb{N}$, 满足

$$|b_m - a^*| \geqslant \varepsilon.$$

我们将满足上述条件的 $m \in \mathbb{N}$ 排为一列, 即 $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$. 于是,

$$\{b_{m_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset D := [a,b]\backslash(a^* - \varepsilon, a^* + \varepsilon),$$

其中 D 是至多两个闭区间的并. 因此根据 Weierstrass 定理, $\{b_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 有一子列收敛到 $b^* \in D$, 则 b^* 也是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列极限, 且 $b^* \neq a^*$. 命题得证.

(证明二) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有两个子列分别收敛到 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ 和 $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$, 且由于 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 极限不存在, 故

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \neq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

2. 对任何正整数 $n > m$, 我们有

$$|x_n - x_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k(k+\sin kx)}\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}.$$

根据 Cauchy 收敛原理, 可以得到 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 极限存在.

3. 是. 根据条件, 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a_N| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而当 $n, m > N$ 时,

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a_N| + |a_m - a_N| < \varepsilon.$$

因此 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 列.

4. 错误. 令 $x_n = \sqrt{n}$, 则对任意 $p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+p} - x_n = \sqrt{n+p} - \sqrt{n} = \frac{p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} = 0.$$

5. 根据 Cauchy 收敛原理, 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > m > N$ 时,

$$|x_n - x_m| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |x_k - x_{k-1}| < \varepsilon.$$

因此一定有 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛. 例: $(-1)^n/n$ 是无界变差数列.

6. 取一子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 ξ 即可.

2 补充习题

1. 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是一个实数集.

(1) 若 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 E 的聚点, 且 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$, 证明 a 是 E 的聚点.

(2) 构造一个数集 E, 使得 E 的聚点集恰好为 $\{1/k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

(1) 不妨设每个 $a_k \neq a$. 对每个正整数 k, 存在 $x_k \in E$ 且

$$|x_k - a_k| < |a - a_k|$$

则且 $x_k \neq a$, 且

$$|x_k - a| \leqslant |x_k - a_k| + |a_k - a| \leqslant 2|a_k - a| \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = a$$

故 a 是聚点.

(2) 作集合

$$E = \left\{ \frac{1}{k} + \frac{1}{m} : k, m \in \mathbb{N}, m \geqslant k^2 \right\}$$

来证 E 符合条件. 定义

$$E_k = \left\{ \frac{1}{k} + \frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}, m \geqslant k^2 \right\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

则有

- $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$;
- $\{E_k\}_{k\geqslant 1}$ 两两不交;
- E_k 的聚点为 $1/k$;

- $E_k \subset [1/k, 1/(k-1)), \forall k \in \mathbb{N}$.

若 a 是 E 的聚点, 则必有 $a \geqslant 0$. 若 $a \neq 0, 1/k$, 则存在某个 $k_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$a \in \left[\frac{1}{k_0}, \frac{1}{k_0-1}\right).$$

由于 a 的倒数不能是整数, 因此 a 位于开区间

$$a \in \left(\frac{1}{k_0}, \frac{1}{k_0-1}\right).$$

由于 a 是 E 的聚点, 故存在 $\{x_n\} \subset E \backslash \{a\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

因此当 n 充分大时, 有不等式

$$|x_n - a| < \min\left\{\frac{1}{k_0-1} - a, a - \frac{1}{k_0}\right\}$$

此时即有 $x_n \in E_{k_0}$. 于是, 我们得到 a 是 E_{k_0} 的聚点, 但 E_{k_0} 的聚点只有 $1/k_0$, 矛盾! 综上, E 的聚点只能是 $\{1/k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

2. 证明: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \sqrt[k]{n} = 1$.

记原来的求和为 S_n. 给定 $N \in \mathbb{N}$, 记

$$S_n^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{N} \sqrt[k]{n}, \qquad S_n^{(2)} = \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} \sqrt[k]{n}$$

则 $S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)}$. 下面分别对 $S_n^{(1)}$ 和 $S_n^{(2)}$ 做估计.

$$S_n^{(1)} \leqslant \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} \cdot N = \frac{N}{\sqrt{n}}$$

由 Bernoulli 不等式, 当 $k \geqslant N+1$ 时,

$$n^{\frac{1}{2k}} \leqslant (1+\sqrt{n})^{\frac{1}{k}} \leqslant 1 + \frac{\sqrt{n}}{k}$$

因此取平方后有

$$\sqrt[k]{n} \leqslant \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{k}\right)^2 = 1 + \frac{2\sqrt{n}}{k} + \frac{n}{k^2}$$

因此

$$
\begin{aligned}
S_n^{(2)} &= \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}\sqrt[k]{n} \\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}\left(1+\frac{2\sqrt{n}}{k}+\frac{n}{k^2}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{n}\left(n+2\sqrt{n}\sum_{k=N+1}^{n}\frac{1}{k}+n\sum_{k=N+1}^{n}\frac{1}{k^2}\right) \\
&\leqslant 1+\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=N+1}^{n}\frac{1}{k(k-1)} \\
&\leqslant 1+\frac{2}{\sqrt{n}}(\ln n+1)+\frac{1}{N}
\end{aligned}
$$

因此我们得到:

$$
S_n \leqslant S_n^{(1)}+S_n^{(2)} \leqslant 1+\frac{2}{\sqrt{n}}(\ln n+1)+\frac{1}{N}+\frac{N}{\sqrt{n}}, \qquad \forall n>N
$$

取正整数 $N=[\sqrt[4]{n}]$, 则

$$
S_n \leqslant 1+\frac{2}{\sqrt{n}}(\ln n+1)+\frac{2}{\sqrt[4]{n}-1}, \qquad \forall n>1
$$

令 n 充分大, 即得到 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1$.

3. 设数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $x_1>0$, 且

$$
x_{n+1}=3+\frac{4}{x_n}
$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 极限存在.

容易知道

$$
x_{n+1}-x_n=\frac{4}{x_n x_{n-1}}(x_{n-1}-x_n) \Longrightarrow |x_{n+1}-x_n| \leqslant \frac{4}{9}|x_{n-1}-x_n|
$$

故

$$
\sum_{n=1}^{\infty}|x_{n+1}-x_n|<+\infty \Longrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ 是 Cauchy 列}
$$

设 $x^*=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 则 $x^*=3+4/x^* \Longrightarrow x^*=4$.

注: 在该问题中, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 并不具有单调性, 因此不好直接利用单调收敛定理求解.