

数学分析习题课教案

叶胥达 741317822@qq.com

2023年10月23日

1 数列的上下极限

上下极限的定义 给定数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 其上下极限分别定义为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k$$

从上述定义可以直接看出:

- 上下极限是良定义的, 因为 $\sup_{k \geq n} a_k$ 关于 n 单调递减, 而 $\inf_{k \geq n} a_k$ 关于 n 单调递增.
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ 当且仅当 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 无上界, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ 当且仅当 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 无下界.
- 若 $a_n \geq M$ 对无穷个 n 成立, 则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \geq M$.
- 若 $a_n \leq M$ 对无穷个 n 成立, 则 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq M$.
- 若 $a_n \leq M$ 对充分大的 n 成立, 则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq M$.
- 若 $a_n \geq M$ 对充分大的 n 成立, 则 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \geq M$.

上下极限与极限的定义类似, 它只和数列充分靠后的那些项有关. 因此, 去掉或增加数列中的有限项, 不会改变其上下极限.

上下极限的等价刻画 实数 M 是 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上极限, 当且仅当

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \text{ 当 } n \text{ 充分大时, 有 } a_n < M + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \text{ 存在无穷多个 } n, \text{ 有 } a_n > M - \varepsilon \end{cases}$$

也可以说, $\forall \varepsilon > 0$, 存在一个无穷集 $T \subset \mathbb{N}$, 使得 $a_n > M - \varepsilon$ 对所有 $n \in T$ 成立.

和子序列极限的关系 给定有界数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 定义其子序列极限集

$$E = \{t \in \mathbb{R} : \text{存在 } \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ 的子序列收敛到 } t\}$$

则有如下结论:

- (1) E 的聚点仍在 E 中;
- (2) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ 和 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ 分别是 E 中的最小值和最大值.

证明 (1) 显然 E 是有界集. 设 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t$.

下面证明: $t \in E$, 即存在 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子序列收敛到 t . 任取一个下标 $i_0 \in \mathbb{N}$.

当 $k \geq 1$ 时, 由于 $t_k \in E$, 故存在子列

$$a_{n_{k,1}}, a_{n_{k,2}}, \dots, a_{n_{k,j}}, \dots$$

收敛到 t_k . 特别的, 存在下标 $j_k \in \mathbb{N}$ 使得 $n_{k,j_k} > i_{k-1}$ 且

$$|a_{n_{k,j_k}} - t_k| \leq \frac{1}{k}$$

故令下标 $i_k = n_{k,j_k} > i_{k-1}$, 则有

$$|a_{i_k} - t| \leq |t_k - t| + \frac{1}{k}$$

令 $k \rightarrow \infty$, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{i_k} = t$, 因此 t 是子序列 $\{a_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 的极限, 从而 $t \in E$.

(2) 设 $t \in E$ 是子序列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 的极限, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 当 k 充分大时有

$$t - \varepsilon < a_{n_k} < t + \varepsilon$$

由于存在无穷多个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $a_n > t - \varepsilon$, 故

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \geq t - \varepsilon$$

由于 ε 是任意的, 故 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \geq t$. 类似地可以证明 $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq t$.

下面证明: 存在一个子列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛到上极限 $M = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$. 任取 $n_0 \in \mathbb{N}$. 根据定义, $\forall k \in \mathbb{N}$, 存在正整数 $n_k > n_{k-1}$ 使得

$$|a_{n_k} - t| < \frac{1}{k}$$

于是 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = M$. 类似可以证明存在子列收敛到下极限 $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.

上下极限的性质 对给定的实数数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$,

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \in (-\infty, +\infty]$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \in [-\infty, +\infty)$;
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, 且等号成立当且仅当 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在;
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$;
- 若 $a_n > 0$, 则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 1 / \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$;
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$;
- 若 $a_n, b_n \geq 0$, 则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n b_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n b_n \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$;
- (夹逼原理) 若 $a_n \leq b_n$, 则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$ 且 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$.
- 若 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列, 则

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

2 习题解答

20231016

1. 注意到 $x_n = n + n(-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}$, 故当 n 为偶数时,

$$x_n = 2n + \sin \frac{n\pi}{4} \geq 2n - 1,$$

从而 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. 当 n 为奇数时,

$$x_n = \sin \frac{n\pi}{4} \geq -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

且等号在 $n = 3$ 处取到. 因此 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是非负有界数列. 若对任何非负有界数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有以下之一成立:

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$;
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$;

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

证明 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛到 $b = \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n < a$. 取 $\varepsilon \in (0, b - a)$, 定义

$$y_n = \begin{cases} \varepsilon, & n = n_k \\ 0, & n \neq n_1, n_2, \dots \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} x_n y_n &= \begin{cases} \varepsilon x_{n_k}, & n = n_k \\ 0, & n \neq n_1, n_2, \dots \end{cases} \\ x_n + y_n &= \begin{cases} x_{n_k} + \varepsilon, & n = n_k \\ x_n, & n \neq n_1, n_2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

故

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \varepsilon b \neq \varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n \varlimsup_{n \rightarrow \infty} y_n = a\varepsilon.$$

且

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

注意到, 对任意 $\delta > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}$ 使得当 $n_k > N_1$ 时有 $x_{n_k} < a - \varepsilon$, 且存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得当 $n > N_2$ 时有 $x_n < a + \delta$, 因此当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时

$$x_n + y_n < a + \delta,$$

从而有

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq a + \delta \implies \varlimsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq a.$$

因此我们得到

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a \neq \varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \varlimsup_{n \rightarrow \infty} y_n = a + \varepsilon,$$

矛盾!

3. 如果 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是收敛的, 则假设 $a > b \geq 0$ 分别是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上极限和下极限. 于是, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有一子列收敛到 a , 而 $\{1/x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有一子列收敛到 $1/b$, 因此

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \geq \frac{a}{b} > 1,$$

矛盾. 因此 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收敛的.

4. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$. 设

$$m = \varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad M = \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n}$$

证明: 对任意满足 $m \leq t \leq M$ 的实数 t , 存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子序列收敛到 t .

证明 如果 $t = m$ 或者 $t = M$, 则 t 已经是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列极限. 下面假设 $t \in (m, M)$.

只需证明: 对给定的 $\varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n^* > N$, s.t. $|x_{n^*} - t| < \varepsilon$.

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$. 故存在正整数 $N_1 \geq N$, 使得

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_1$$

根据下极限的定义, 存在正整数 $n_1 > N_1$ 使得

$$x_{n_1} < t$$

根据上极限的定义, 存在正整数 $n_2 > n_1$ 使得

$$x_{n_2} > t$$

定义 $n_3 = \sup\{n \geq n_1 : x_n < t\}$, 则 $n_3 < n_2$. 取 $n^* = n_3 + 1$, 则依 n_3 定义有 $x_{n^*} \geq t$, 且

$$x_{n^*} \leq x_{n_3} + |x_{n^*} - x_{n_3}| < t + \varepsilon$$

因此 $|x_{n^*} - t| < \varepsilon$, 故命题成立.

5. 由于 $x_n \leq nx_1$, 故 $\frac{x_n}{n}$ 有界. 设

$$A = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$$

则对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\frac{x_N}{N} \leq A + \varepsilon$, 即 $x_N \leq N(A + \varepsilon)$.

对任意 $n \in \mathbb{N}$, 设 $n = qN + r$, 其中 $q \geq 0$ 且 $r \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, 则

$$x_n \leq x_{qN} + x_r \leq qx_N + x_r$$

令 $R = \max_{0 \leq r \leq N-1} x_r$, 则

$$x_n \leq qN(A + \varepsilon) + R \leq n(A + \varepsilon) + R, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

故

$$\frac{x_n}{n} \leq A + \varepsilon + \frac{R}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

在两边取上极限, 有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq A + \varepsilon$$

由 ε 的任意性知 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq A$. 但 A 为下极限, 故极限存在.

3 补充习题

1. 若 $x_n > 0$, 证明: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1 + x_{n+1}}{x_n} - 1 \right) \geq 1$.

反证法. 假设

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1 + x_{n+1}}{x_n} - 1 \right) < 1$$

则当存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n \geq N$ 时, 有

$$n \left(\frac{1 + x_{n+1}}{x_n} - 1 \right) < 1 \implies \frac{x_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} < \frac{x_n}{n}$$

即

$$\frac{x_n}{n} - \frac{x_{n+1}}{n+1} \geq \frac{1}{n+1}, \quad n \geq N$$

故

$$\frac{x_N}{N} - \frac{x_n}{n} \geq \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k+1}, \quad n \geq N$$

左端有上界, 而右端在 $n \rightarrow \infty$ 时无界, 矛盾!

注: 若 $x_n = n \ln(n+1)$, 则可以验证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1 + x_{n+1}}{x_n} - 1 \right) = 1$$

证明留作练习.

2. 设 $\{x_n\}$ 有界且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n} + 2x_n) = 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

设 $a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n|$. 若 $a > 0$, 取常数 $\varepsilon \in (0, a/3)$, 则存在一个无穷集 $T \subset \mathbb{N}$, 使得

$$|x_n| > a - \varepsilon, \quad \forall n \in T$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n} + x_n) = 0$, 故存在 $N_0 \in \mathbb{N}$, 使得当 $n \geq N_0$ 时有

$$\varepsilon > |x_{2n} + 2x_n| \geq 2|x_n| - |x_{2n}|$$

故当 $n \in T$ 且 $n \geq N_0$ 时,

$$|x_{2n}| \geq 2|x_n| - \varepsilon > 2(a - \varepsilon) - \varepsilon = 2a - 3\varepsilon$$

由于对无穷多个 $n \in \mathbb{N}$ 有 $|x_n| \geq 2a - 3\varepsilon$, 我们有

$$a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n| \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_{2n}| \geq 2a - 3\varepsilon$$

即 $\varepsilon \geq a/3$, 矛盾! 故命题成立.

另证: 由条件

$$\begin{aligned} 0 &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_{2n} + 2x_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_{2n} + 2 \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + 2 \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \\ 0 &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_{2n} + 2x_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_{2n} + 2 \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + 2 \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \end{aligned}$$

令 $a = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, $b = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, 则 $a \leq b$ 且

$$0 \leq b + 2a, \quad 0 \geq a + 2b$$

故

$$0 \geq a + 2b \geq 2a + b \geq 0$$

从而 $a = b = 0$.