数学分析习题课教案

叶胥达　741317822@qq.com

2023年10月23日

1　习题解答

5. 利用

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \qquad \sin 2x = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

可以得到

$$2\sin x - \sin 2x = x^3 + o(x^3),$$

从而

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3} = 1.$$

8. 直接计算得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(n\arccos x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\arccos x\right)}{x}\\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2} - n\arccos x\right)}{x}\\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{n\pi}{2} - n\arccos x}{x}\end{aligned}$$

作换元 $y = \arccos x$, 则 $y \to \frac{\pi}{2}$, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(n\arccos)}{x} = n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\lim_{y\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2} - y}{\cos y} = n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z} = n(-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

10. 取对数, 容易得到当 $x \to \infty$ 时,

$$x^2\ln\cos\frac{a}{x} \sim x^2\left(\cos\frac{a}{x} - 1\right) \sim -\frac{a^2}{2}.$$

11. 首先, 可以不妨设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 严格单调递增. 否则, 由于 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 发散到无穷, 总可以取出一个严格单调递增的子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 并用 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 代替 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 即可.

接着, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $M \in \mathbb{R}$ 使得

$$|f(x) - A| \leqslant \varepsilon, \quad \forall x \geqslant M.$$

根据条件, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$|f(x_n) - A| \leqslant \varepsilon, \quad \forall n \geqslant N.$$

我们取 $M = x_N$. 当 $x \geqslant x_N$ 时, 存在唯一的 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geqslant N$ 满足

$$x_N \leqslant x < x_{N+1}.$$

此时即有

$$f(x_N) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{N+1}) \Longrightarrow |f(x) - A| \leqslant \varepsilon.$$

12. 否则假设 $x_n \leqslant M$ 恒成立, 则由于当 $x \geqslant M + 1$ 时有 $f(x) \leqslant f(M + 1)$, 我们得到

$$\varlimsup_{x\to+\infty} f(x) \leqslant f(M+1) < f(M).$$

而由于 $x_n \leqslant M$ 恒成立, 故 $f(x_n) \geqslant M$ 可得到

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) \geqslant f(M),$$

于是有

$$\varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) > \varlimsup_{x\to+\infty} f(x),$$

矛盾!

13. 利用 $f(x) = f(x + nT)$, 然后令 $n \to \infty$.

14. 不妨设 $\alpha < 1$. 根据条件, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$|f(x) - f(\alpha x)| \leqslant \varepsilon|x|, \quad x \in U_0(\delta).$$

特别有

$$|f(\alpha^k x) - f(\alpha^{k+1} x)| \leqslant \varepsilon\alpha^k|x|, \quad x \in U_0(\delta), \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

将上述不等式对 $k=0,1,\cdots,n-1$ 相加可得

$$|f(x)-f(\alpha^n x)|\leqslant \varepsilon\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}|x|,\qquad x\in U_0(\delta).$$

令 $n\to\infty$ 则得到

$$|f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{1-\alpha}|x|.$$

由于 ε 可以任意小, 故 $\lim_{x\to 0} f(x)/x=0$.

20231025

3. 取对数, 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}a_j^x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}a_j^x-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\frac{a_j^x-1}{x}=\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\ln a_j.$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}a_j^x\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\prod_{j=1}^{p}a_j\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2 补充习题

1. 给定常数 $0<b\leqslant 2$, 定义数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 如下: $x_1=\frac{1}{2}$,

$$x_{n+1}=bx_n(1-x_n),\qquad n\in\mathbb{N}.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在且有限.

证明 容易看出 $0<x_n<1$ 对一切 $n\in\mathbb{N}$ 成立.

- 若 $b\leqslant 1$, 则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减, 从而极限存在.
- 若 $1<b\leqslant 2$, 取常数 $a=1-\frac{1}{b}$, 则容易看出 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$. 下面用归纳法证明: $a\leqslant x_n\leqslant 1-a$ 对一切 $n\in\mathbb{N}$ 成立. $n=1$ 时结论显然成立. 对 $n+1$ 的情形, 可以得到

  $$x_{n+1}=bx_n(1-x_n)\leqslant\frac{b}{4}\leqslant 1-a,\qquad x_{n+1}=bx_n(1-x_n)\geqslant ba(1-a)\geqslant a,$$

  于是结论对所有 $n\in\mathbb{N}$ 成立. 此时由 $x_{n+2}=bx_{n+1}(1-x_{n+1})$ 可以得到

  $$x_{n+2}-x_{n+1}=b(x_{n+1}-x_n)(1-x_{n+1}-x_n)=b(x_{n+1}-x_n)(1+bx_n^2-(b+1)x_n),\quad (*)$$

为方便计算, 在区间 $[a,1-a]$ 上定义函数

$$f(x)=1+bx^2-(b+1)x,$$

则容易得到: 当 $a\leqslant x\leqslant 1-a$ 时, 有

$$f(x)\leqslant \max\{f(a),f(1-a)\}=(1-ab)(1-a)=\frac{2}{b}-1,$$

和

$$f(x)\geqslant f\left(\frac{b+1}{2b}\right)=-\frac{(b-1)^2}{4b},$$

故对常数

$$q=\max\left\{\frac{(b-1)^2}{4},2-b\right\}<1$$

恒有 $|bf(x)|\leqslant q$, $x\in[a,1-a]$, 从而由 $(*)$ 可得

$$|x_{n+2}-x_{n+1}|\leqslant q|x_{n+1}-x_n|,\qquad \forall n\in\mathbb{N},$$

从而 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界变差数列, 收敛.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且有界. 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在, 证明: 存在 $t\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x)=t$ 在 $[0,+\infty)$ 上有无穷多个解.

证明 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在, 有

$$M=\varlimsup_{x\to\infty}f(x),\qquad m=\varliminf_{x\to\infty}g(x)$$

存在且有限, 还有 $M>m$. 取定 $t\in(m,M)$. 于是只需证明: 对任意 $A>0$, 存在 $x\geqslant A$ 使得 $f(x)=t$.

使用反证法. 如果对某个 $A>0$, 任意 $x\geqslant A$ 都有 $f(x)\neq t$, 不妨设 $f(A)>t$. 于是当 $x>A$ 时, 恒有 $f(x)>t$, 否则由介值原理知区间 (A,x) 存在方程 $f=t$ 的解. 于是得到

$$m=\varliminf_{x\to\infty}f(x)\geqslant t$$

矛盾!

3. 设 $f(x)$, $g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的周期函数, 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$. 试证: $f(x)\equiv g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

证明 设 $T_1, T_2 > 0$ 分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期. 下面用反证法证明: $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
否则假设对某个 $x \in \mathbb{R}$ 有 $f(x) \neq g(x)$, 则对所有 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$f(x) = f(x + nT_1), \quad g(x) = g(x + nT_2), \quad n \in \mathbb{N}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} \Big(f(x + nT_1) - g(x + nT_1) \Big) = 0$$

故

$$\lim_{n\to\infty} g(x + nT_1) = f(x)$$

由于 g 以 T_2 为周期, 故

$$\lim_{n\to\infty} g(x + nT_1 + nT_2) = f(x)$$

同理可得

$$\lim_{n\to\infty} f(x + nT_1 + nT_2) = g(x)$$

故根据条件,

$$g(x) - f(x) = \lim_{n\to\infty} \Big(f(x + nT_1 + nT_2) - g(x + nT_1 + nT_2) \Big) = 0$$

矛盾!

思考题

为方便起见, 引入如下定义:

- **闭集:** $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}$ 是闭集当且仅当 E 的聚点集 $E' \subset E$. 直观地, E 可以是一些闭区间的并.
- **开集:** $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}$ 是开集当且仅当 $\forall x \in E$, $\exists \delta > 0$, 使得 $U(x, \delta) \subset E$.

闭集的补集是开集, 开集的补集是闭集. 下面陈述贝尔纲定理 (Baire's Category Theorem):

> 设 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的稠密开集列, 则 $\cap_{k\geqslant 1} E_k$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

证明 只需证明: 对任何 $\mathbb{R}$ 中的开集 W, $\cap_{k\geqslant 1} E_k$ 与 W 交集非空. 由于 $E_1 \cap W$ 在 W 中稠密, 故可以取 $x_1 \in W$ 和 $\delta_1 < 1$ 使得 $\overline{U(x_1, \delta_1)} \subset U_1 \cap W$. 一般的, 假设已经取出 $x_n \in W$ 和 $r_n < \frac{1}{n}$, 我们可以取 $x_{n+1} \in W$ 和 $r_{n+1} < \frac{1}{n+1}$ 使得

$$\overline{U(x_{n+1}, \delta_{n+1})} \subset U(x_n, \delta_n) \cap W.$$

容易知道当 $n \geqslant m \geqslant 1$ 时,

$$|x_n - x_m| \leqslant r_m < \frac{1}{m},$$

故 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathbb{R}$ 中是 Cauchy 列, 并设其极限为 x^*. 容易知道, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$x^* \in \overline{U(x_{n+1}, \delta_{n+1})} \subset E_n \cap U(x_n, \delta) \subset E_n \cap W.$$

因此

$$x^* \in \left(\bigcap_{k \geqslant 1} E_k \right) \cap W,$$

从而 $\cap_{k \geqslant 1} E_k$ 和 W 相交非空.

设 $\mathbb{R}$ 上的连续函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 对于每一个 $x \in \mathbb{R}$ 都是有界的, 证明: 存在区间 $[a, b]$ 使得 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $[a, b]$ 上一致有界.

证明 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $M > 0$, 定义集合

$$S_n(M) = \{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| \leqslant M\}.$$

由于 $f_n(x)$ 是连续函数, $S_n(M)$ 是闭集, 且 $S_n(M)$ 关于 M 单调递增. 下面定义

$$S(M) = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(M),$$

则 $S(M)$ 为闭集, 且 $S(M)$ 关于 M 单调递增. 此时结论变为: 存在闭区间 $[a, b]$ 和 $M > 0$ 使得

$$[a, b] \subset S(M). \tag{$*$}$$

若 $(*)$ 不对, 则对任何闭区间 $[a, b]$ 和任何 $M > 0$, 都有 $[a, b] \not\subset S(M)$, 从而

$$[a, b] \cap S(M)^c \neq \phi.$$

这里, $S(M)^c$ 作为 $S(M)$ 的补集, 是一个开集, 并且关于 M 单调递减. 于是, 对任意 $M > 0$, $S(M)^c$ 是 $\mathbb{R}$ 中的稠密开集. 根据贝尔纲定理,

$$\bigcap_{M=1}^{\infty} S(M)^c$$

在 $\mathbb{R}$ 中稠密. 特别的, 可以取 $x_0 \in \cap_{M=1}^{\infty} S(M)^c$, 则 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 x_0 处无界.

注: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 可以在一个给定的闭区间上不是一致有界的.