

数学分析习题课教案

叶胥达 741317822@qq.com

2023年10月23日

1 习题解答

3. (1) 是. 若 $f(x) + g(x)$ 在 $x = 0$ 处不是间断点, 则其左右极限

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + g(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + g(x)$$

都存在且有限. 而 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的左右极限存在, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0-} g(x)$$

存在且有限. 这与 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处是第二类间断点矛盾.

(2) 否. 取

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处为第一类间断, $g(x)$ 在 $x = 0$ 处为第二类间断, 但 $f(x)g(x) \equiv 0$.

4. 我们只证明 $M(x) \in C[a, b]$. 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

于是, 当 $x \geq y$ 且 $|x - y| \leq \delta$ 时, $M(x) \geq M(y)$, 且一定有

$$M(x) - M(y) \leq \max_{t \in [y, x]} f(t) - f(y) \leq \varepsilon.$$

这里第一个不等号成立是因为 $f(t)$ 在 $[a, x]$ 上的最大值一定在 $[a, y]$ 或 $[y, x]$ 上取到. 故 $M(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

5. (1) 容易看出 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减且非负, 故极限存在.

(2) 在 $a_{n+1} = f(a_n)$ 两端令 $n \rightarrow \infty$, 由 f 的连续性可得到 $f(l) = l$.

(3) $f(l) = l$ 即得到 $l = 0$.

6. 容易看出, $Q(x)$ 的显式表达式为

$$Q(x) = \begin{cases} 1, & f(x) = \max_{t \in [0, x]} f(t), \\ 0, & f(x) < \max_{t \in [0, x]} f(t). \end{cases}$$

- 若 $f(x)$ 单调递增, 则 $Q(x) \equiv 1$, 从而 $Q(x)$ 连续.
- 若 $Q(x)$ 连续, 往证 $f(x)$ 是单调递增的. 否则, 设存在 $0 \leq a < b \leq 1$ 使得 $f(a) > f(b)$. 由

$$f(b) < f(a) \leq \max_{t \in [0, b]} f(t)$$

可得 $Q(b) = 0$. 但 $Q(0) = 1$, 故由介值定理知存在 $x \in (0, 1)$ 使得 $Q(x) = \frac{1}{2}$, 矛盾!

故命题得证.

7. 由于 $f(x) = f(x^2) = f(-x)$, 可知 $f(x)$ 是偶函数.

- 对任意 $x > 0$, 有 $f(x) = f(x^{\frac{1}{2^n}})$ 对任何 $n \in \mathbb{N}$ 成立. 由于 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 故

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(1).$$

于是当 $x > 0$ 时, 恒有 $f(x) \equiv f(1)$.

- 由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 故

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(1).$$

综上, $f(x)$ 为常值函数.

8. 反证法. 若 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时不发散到 ∞ , 则存在序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足:

- $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty$,
- $|f(x_k)| \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$ 对某个常数 M 成立.

由于 $f(x)$ 在 $[-M, M]$ 上连续, 故存在常数 A 使得

$$|f(x)| \leq A, \quad \forall x \in [-M, M].$$

因此有

$$|f(f(x_k))| \leq A, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

这与 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(f(x)) = \infty$ 矛盾! 命题得证.

20231101

1. 令 $a = \min\{x_1, \dots, x_n\}$, $b = \max\{x_1, \dots, x_n\}$. 在 $[a, b]$ 上使用介值定理即可.

2. 使用介值定理.

3. 先证明: 对任何 $[a, b]$ 中的实数 $x_1 < x_2 < x_3$, 不可能有

$$f(x_2) > \max\{f(x_1), f(x_3)\}, \text{ 或 } f(x_2) < \min\{f(x_1), f(x_3)\}$$

否则, 取 $M \in (\max\{f(x_1), f(x_3)\}, f(x_2))$, 则区间 (x_1, x_2) 和区间 (x_2, x_3) 中分别有 $f(x) = M$ 的两个解, 矛盾!

不妨设 $f(a) < f(b)$. 下面证明: 当 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ 时, $f(x_1) < f(x_2)$. 否则, $f(x_1) > f(x_2)$. 对 $a \leq x_1 < x_2$ 使用引理, 有 $f(a) \geq f(x_1)$. 对 $x_1 < x_2 \leq b$ 使用引理, 有 $f(b) \leq f(x_2)$. 但此时

$$f(a) \geq f(x_1) > f(x_2) \geq f(b)$$

与 $f(a) < f(b)$ 的假设矛盾!

4. 设 $a = f(0) \in \mathbb{R}$. 取常数 $M > 0$ 使得对任意满足 $|x| \geq M$ 的实数 x , 都有

$$f(x) > a + 1.$$

于是 $f(x)$ 的最小值一定在闭区间 $[-M, M]$ 中的某一点取到.

5. 用二分法构造闭区间套即可.

6. 只需证明: 存在 $y_1 \in [a, b]$ 使得 $f(y_1) \geq c$, 及 $y_2 \in [a, b]$ 使得 $f(y_2) \leq c$.

- 先证明: $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \geq c$. 如果此结果不对, 则存在 $\varepsilon > 0$ 和 $K \in \mathbb{N}$, 使得

$$f(x_k) < c - \varepsilon, \quad \forall k \geq K.$$

此时

$$\sum_{k=1}^n kf(x_k) = \sum_{k=1}^K kf(x_k) + \sum_{k=K+1}^n f(x_k) \leq C_K + \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{K(K+1)}{2} \right) (c - \varepsilon),$$

其中 $C_K = \sum_{k=1}^K kf(x_k)$. 于是对任意正整数 $n \geq K$, 有

$$\frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n kf(x_k) \leq \frac{2}{n(n+1)} C_K + \left(1 - \frac{K(K+1)}{n(n+1)}\right) c - \varepsilon.$$

于是令 $n \rightarrow \infty$, 可得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n kf(x_k) \leq c - \varepsilon < c,$$

矛盾! 因此有 $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \geq c$. 特别的, $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ 有一子列 $\{x_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ 使得 $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} f(x_{k_j}) \geq c$.

设 y_1 是 $\{x_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ 的一个聚点, 则 $f(y_1) \geq c$.

- 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n kf(x_k) \leq c + \varepsilon.$$

由于存在下标 $k \in \{1, \dots, n\}$, 使得

$$f(x_k) = \min\{f(x_1), \dots, f(x_n)\},$$

故有

$$f(x_k) \leq \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n kf(x_k) \leq c + \varepsilon.$$

特别的, 对任何 $p \in \mathbb{N}$, 存在 $z_p \in [a, b]$ 使得

$$f(z_p) \leq c + \frac{1}{p}.$$

设 y_2 是 $\{f(z_p)\}_{p=1}^\infty$ 的一个聚点, 则 $f(y_2) \leq c$.

另证: 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值为 m, M . 则由于

$$m \leq f(x_k) \leq M$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 成立, 因此对任意 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$m \leq \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n kf(x_k) \leq M.$$

令 $n \rightarrow \infty$ 并取上极限, 可以得到

$$m \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n kf(x_k) = c \leq M.$$

即 $m \leq c \leq M$. 根据介值定理, 存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = c$.

2 补充习题

1. 设 $f(x) \in C[0, +\infty)$, 且对任何 $h > 0$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(nh) = 0$, 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

引理 设正数列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = +\infty$. 则对任何 $m \in \mathbb{N}$ 和正数区间 $[a, b]$, 存在子区间 $[a', b'] \subset [a, b]$, 使得存在 $n, k \in \mathbb{N}$ 满足 $k \geq m$, 且

$$[na', nb'] \subset [x_k - \delta_k, x_k + \delta_k]$$

引理的证明 不妨设 $\delta_k < \frac{b-a}{3}$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立. 注意到, 存在 $M \geq 0$, 使得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n(2a+b)}{3}, \frac{n(a+2b)}{3} \right] \supset [M, +\infty)$$

任取一个指标 k 使得 $x_k \geq M$ 且 $k \geq m$, 可知存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得

$$x_k \in \left[\frac{n(2a+b)}{3}, \frac{n(a+2b)}{3} \right]$$

于是存在 $c \in [\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}]$ 使得 $x_k = nc$. 因此取

$$a' = c - \frac{\delta_k}{n}, \quad b' = c + \frac{\delta_k}{n}$$

则由 $\delta_k < \frac{b-a}{3}$ 知 $[a', b'] \subset [a, b]$, 且

$$[na', nb'] = [x_k - \delta_k, x_k + \delta_k]$$

回到原题. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不为 0, 则存在一列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 发散到 $+\infty$, 使得 $|f(x_k)| \geq 2\varepsilon_0$ 恒成立. 由 f 的连续性知存在 $\delta_k \in (0, 1)$ 使得

$$|f(x)| \geq \varepsilon_0, \quad \forall x \in [x_k - \delta_k, x_k + \delta_k]$$

下面使用数学归纳法构造一列正数闭区间 $\{[a_m, b_m]\}_{m=1}^{\infty}$, 满足:

- 对每个 $m \geq 2$, $[a_m, b_m] \subset [a_{m-1}, b_{m-1}]$;
- 对每个 $m \geq 1$, 存在 $n, k \in \mathbb{N}$ 使得 $[na_m, nb_m] \subset [x_k - \delta_k, x_k + \delta_k]$ 且 $k \geq m$.

当 $m = 1$ 时, 取 $[a_1, b_1] = [x_1, y_1]$ 即可. 假设 $[a_{m-1}, b_{m-1}]$ 以及构造完毕, 则依引理存在 $[a_m, b_m]$ 满足上述条件. 由闭区间套定理, 取

$$h \in \bigcap_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m]$$

则 $h > 0$. 于是对每个 $m \in \mathbb{N}$, 存在 $k \geq m$ 使得对某个 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$nh \in [a_m, b_m] \subset [x_k - \delta_k, x_k + \delta_k]$$

从而 $|f(nh)| \geq \varepsilon_0$. 对给定的 $m \in \mathbb{N}$, 将满足上述条件的 $n, k \in \mathbb{N}$ 记为 n_m, k_m , 则 $k_m \geq m$, 且

$$n_m h \geq x_{k_m} - \delta_{k_m} \geq x_{k_m} - 1$$

从而 $\lim_{m \rightarrow \infty} n_m = +\infty$. 但 $|f(n_m h)| \geq \varepsilon_0$, 故

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(nh) \geq \varepsilon_0$$

这和 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(nh) = 0$ 矛盾!

2. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 且对任何 $h > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(nh)$ 存在有限, 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在.

证明 我们使用 Cauchy 判别准则证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在. 对任意 $\varepsilon > 0$, 假设 $\delta > 0$ 满足

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1)$$

对任意 $x, y \geq 0$, 设 $x_0, y_0 \in \delta\mathbb{N}$ 使得

$$|x - x_0| \leq \delta, \quad |y - y_0| \leq \delta$$

且 $x_0 \geq x, y_0 \geq y$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n\delta)$ 存在且有限, 故存在 $A \geq 0$ 使得

$$x_0, y_0 \geq A \implies |f(x_0) - f(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2)$$

于是当 $x, y \geq A$ 时, 必有 $x_0, y_0 \geq A$, 则由 (1)(2)

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(y) - f(y_0)| + |f(x_0) - f(y_0)| < \varepsilon$$

故由 Cauchy 收敛准则知 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在.

3. 讨论函数的一致连续性:

(1) $f(x) = \cos x^p$, 其中常数 $p > 0, x \in (0, +\infty)$;

(2) $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}, x \in (1, +\infty)$.

解 (1) 当 $p \leq 1$ 时, $\cos x^p$ 一致连续. 这是由于 x^p 和 $\cos x$ 都是一致连续的.

当 $p > 1$ 时, $f(x) = \cos x^p$ 不是一致连续的. 取

$$x_k = (2k\pi)^{\frac{1}{p}}, \quad y_k = ((2k+1)\pi)^{\frac{1}{p}}$$

则 $f(x_k) = 1$, $f(y_k) = -1$, 而 $\lim_{k \rightarrow \infty} (y_k - x_k) = 0$. 这个极限成立是因为

$$\begin{aligned} y_k - x_k &= ((2k+1)\pi)^{\frac{1}{p}} - (2k\pi)^{\frac{1}{p}} \\ &= (2k\pi)^{\frac{1}{p}} \left(\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{\frac{1}{p}} - 1 \right) \\ &\sim (2k\pi)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{2kp} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(2) 令 $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$, 则 $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上连续. 下面证明 $f(x)$ 在 $[e, +\infty)$ 上 Lipschitz 连续.

当 $x \geq y \geq e$ 时, 注意到

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{x-1}{\ln x} - \frac{y-1}{\ln y} \right| \\ &\leq \left| \frac{x-1}{\ln x} - \frac{y-1}{\ln x} \right| + \left| \frac{y-1}{\ln x} - \frac{y-1}{\ln y} \right| \\ &\leq |x-y| + |y-1| \ln \frac{x}{y} \\ &\leq |x-y| + y \ln \left(1 + \frac{x-y}{y} \right) \\ &\leq |x-y| + y \cdot \frac{x-y}{y} \\ &= 2|x-y| \end{aligned}$$

因此 Lipschitz 常数为 2, 从而 $f(x)$ 在 $[e, +\infty)$ 上一致连续.