

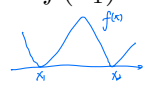
20231127作业

1. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 $\exists f'''(x)$, 且 $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$.

证明: $\exists \xi \in (a, b)$ s.t. $f'''(\xi) = 0$.
 $f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow f'(c) = 0, c \in (a, b)$
 在 (a, c) 中有 $f' = 0$; 在 (c, b) 中有 $f' = 0$
 在 (a, b) 中有 $f'' = 0$

2. 设 $f(x) \geq 0$; $f'''(x) \exists, x \in (a, b)$, 且 $\exists x_1, x_2 \in (a, b)$ s.t. $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

证明: $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f'''(\xi) = 0$.
 $f'(x_1) = 0, f'(x_2) = 0$
 $\Rightarrow \exists \xi \in (x_1, x_2), f''(\xi) = 0$



3. 设 $f(x), f'(x) \in D[a, b]$, $f(a) = f(b) = 0$, 且 $\exists c \in (a, b)$ s.t. $f(c) > 0$.

证明: $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f''(\xi) < 0$.
 Lagrange 中值:
 $x_1 \in (a, c)$ s.t. $f'(x_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} > 0$
 $x_2 \in (c, b)$ s.t. $f'(x_2) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} < 0$

4. 设 $f(x) > 0, x \in [a, b]$, $f''(x) \exists$, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$.

证明: $\exists \xi \in (a, b)$ s.t. $f(\xi)f''(\xi) - 2[f'(\xi)]^2 = 0$.
 $\text{令 } g(x) = \frac{f'(x)}{f^2(x)}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{f''(x)f(x) - f'(x) \cdot 2f'(x)f(x)}{f^4(x)}$
 $g'(x) = 0 \Rightarrow f(x)f''(x) - 2[f'(x)]^2 = 0$

5. 设 $f(x) \in D[1, 2]$. 证明: $\exists \xi \in (1, 2)$ s.t. $f(2) - f(1) = \frac{\xi^2}{2} f'(\xi)$.
 $\frac{f(2) - f(1)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{1}} = \frac{f'(\xi)}{-\frac{1}{\xi^2}}$

6. 证明: 对任意的两个实数 x_1, x_2 , 有 $|\arctan x_1 - \arctan x_2| \leq |x_1 - x_2|$.

7. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ ($0 < a < b$) 上连续, 在 (a, b) 内可导. 求证: 存在 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (a, b)$,

使得 $f'(\xi_1) = (b+a) \frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2} = (b^2 + ab + a^2) \frac{f'(\xi_3)}{3\xi_3^2}$.
 $\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2} \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b^3 - a^3} = \frac{f'(\xi_3)}{3\xi_3^2}$

8. 证明: 设 $x \geq 0$, 则

$$(1) \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}, \text{ 其中 } \frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

9. 课本习题七, 第17题.

20231129作业

1. 设 $f(x) \in D(0, +\infty)$ 且 $f(0+) = f(+\infty) = 0$, 证明: $\exists \xi \in (0, +\infty)$ s.t. $f'(\xi) = 0$.

2. 求证: Chebyshev-Laguerre $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$ 有 n 个不同的零点.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上有直到 n 阶导数,

且有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) = B$. 求证 $B = 0$.

4. 求极限: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^n} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{B}{n!} = 0$$

$\Rightarrow B = 0$

5. 求极限: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$.

6. 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

7. 求极限: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

8. 由拉格朗日中值定理, 有 $\arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-\theta^2 x^2}}$ ($0 < \theta < 1$).

求证 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

9. 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x)] = k$ (k 有限或 $\pm\infty$).

求证: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (f'(x) + f(x))}{e^x} = k.$$

10. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续可微, 且 $e^{-x^2} f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有界. 证明: $x e^{-x^2} f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有界.

$$\text{令 } H(x) = \frac{e^{x^2}}{x}, \quad x \geq 1, \quad \text{则}$$

$$H'(x) = \frac{2x e^{x^2} \cdot x - e^{x^2} \cdot 1}{x^2} = \frac{e^{x^2} (2x^2 - 1)}{x^2} \geq e^{x^2}$$

$$\text{由 } |e^{-x^2} f'(x)| \leq C \Rightarrow |f'(x)| \leq C H'(x), \quad x \geq 1,$$

$$\text{从而 } |f(x)| \leq |f(1)| + C H(x) \leq \frac{C e^{x^2}}{x}, \quad x \geq 1.$$

于是 $x e^{-x^2} f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有界

数学分析习题课教案 (2021.12.5)

叶胥达 abneryepku@pku.edu.cn

2021 年 12 月 2 日

1. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 有连续的 n 阶导函数. 若 $f(x), f^{(n)}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界, 证明: $f^{(1)}(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界 (提示: 将 $f(1), \dots, f(n-1)$ 在 $x=0$ 处 Taylor 展开).

证明 我们来证明下面的引理:

引理 若 $|f(x)|, |f^{(n)}(x)| \leq M$ 时, 则存在常数 C 使得

$$|f^{(k)}(0)| \leq C, \quad k = 1, \dots, n-1$$

注意到, 当 $x_0 \neq 0$ 时, 可以用 $g(x) = f(x - x_0)$ 代替 $f(x_0)$ 进行讨论, 因此从引理可得到

推论 若 $|f(x)|, |f^{(n)}(x)| \leq M$ 时, 则存在常数 C 使得

$$|f^{(k)}(x)| \leq C, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

因此原命题成立. 下面只需证明引理成立.

定义 $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. 由 Taylor 展开公式, 当 $x > 0$ 时, 存在 $\xi_x \in (0, x)$ 使得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} x^n \quad (1)$$

特别的, 取 $x = 1, \dots, n-1$, 有

$$f(j) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k j^k + \frac{f^{(n)}(\xi_j)}{n!} j^n, \quad \xi_j \in (0, j) \quad (2)$$

令 $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n-1}$ 满足

$$\mathbf{J}_{jk} = j^k, \quad j, k = 1, \dots, n-1$$

$$\mathbf{a}_k = a_k, \quad k = 1, \dots, n-1$$

$$b_j = f(j) - \frac{f^{(n)}(\xi_j)}{n!} j^n, \quad j = 1, \dots, n-1$$

则 (2) 可以改写为 $(n-1)$ 阶线性方程组

$$\mathbf{J}\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (3)$$

注意 $\det \mathbf{J}$ 是范德蒙行列式, 因此 $\mathbf{J}$ 是可逆矩阵, 从而

$$\mathbf{a} = (\mathbf{J})^{-1}\mathbf{b}$$

由于 $\mathbf{b}$ 中的每个元素有界, 故 $\mathbf{a}$ 作为 $\mathbf{b}$ 的线性组合是有界的. 因此 $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ 是有界的.

2. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界, 且 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续. 证明: $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

证明 由一致连续, 知存在 $\delta > 0$ 使得

$$|x - y| \leq \delta \implies |f'(x) - f'(y)| \leq 1$$

若 $f'(x)$ 无界, 不妨设序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得

$$|f'(x_n)| > n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = +\infty$$

故 $x \in [x_n, x_n + \delta]$ 时, $|f'(x_n)| \geq n - 1$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi_n \in (x_n, x_n + \delta)$ 使得

$$|f(x_n + \delta) - f(x_n)| = |f'(\xi_n)| \geq n - 1$$

但 $|f(x)| \leq M$ 有界, 故 $n - 1 \leq 2M$, 令 $n \rightarrow \infty$ 即矛盾.

3. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 有连续的 n 阶导函数. 证明: 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 和 $h > 0$, 存在 $\xi \in (x, x + nh)$ 使得

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x + (n-k)h) = h^n f^{(n)}(\xi)$$

证明 对 n 使用数学归纳法证明上述命题. 当 $n = 1$ 时, 上式即为 Lagrange 中值定理. 设命题对 n 成立, 考虑 $n+1$ 的情形. 定义

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x + (n-k)h)$$

则我们证明:

$$F_{n+1}(x) = F_n(x+h) - F_n(x)$$

这是因为, 若补充定义 $\binom{n}{n+1} = 0$ 和 $\binom{n}{-1} = 0$, 则

$$\begin{aligned}
& F_n(x+h) - F_n(x) \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x + (n-k+1)h) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x + (n-k)h) \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x + (n-k+1)h) + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n}{k-1} f(x + (n-k+1)h) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n}{k} f(x + (n-k+1)h) + \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n}{k-1} f(x + (n-k+1)h) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f(x + (n-k+1)h) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} f(x + (n-k+1)h) = F_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

因此, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\eta \in (x, x+h)$, 使得

$$F_{n+1}(x) = hF'_n(\eta) = h \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f'(\eta + (n-k)h)$$

对 $f'(x)$ 使用归纳假设, 存在 $\xi \in (\eta, \eta + nh) \subset (x, x + (n+1)h)$, 使得

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f'(\eta + (n-k)h) = h^n f^{(n+1)}(\xi)$$

故

$$F_{n+1}(x) = h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$$

即命题在 $n+1$ 时成立.

4. 设 $f(x), g(x)$ 在 $x=0$ 附近有直到 n 阶的 Taylor 展式

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^k), \quad g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^k)$$

且 $b_0 \neq 0$. 证明: $h(x) = f(x)/g(x)$ 在 $x=0$ 处有 n 阶 Taylor 展式

$$h(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k + o(x^k)$$

且

$$c_k = \frac{1}{b_0} \left(a_k - \sum_{j=0}^{k-1} c_j b_{k-j} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

由此计算 $\tan x$ 的 8 阶 Taylor 展式.

证明 容易验证, 由上述表达式给出的 $\{c_k\}_{k=0}^n$ 满足

$$\left(\sum_{k=0}^n c_k x^k + o(x^n)\right) \left(\sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)\right) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

定义多项式

$$c(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$$

则上述表达式给出 $c(x)g(x) = f(x) + o(x^n)$, 从而

$$c(x) = h(x) + o\left(\frac{x^n}{g(x)}\right)$$

注意 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = b_0 \neq 0$, 故

$$h(x) = c(x) + o(x^n)$$

命题得证.