

数学分析习题课教案 (2021.12.5)

叶胥达 abneryepku@pku.edu.cn

2021 年 12 月 9 日

1. 设 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上为凸函数, 证明:

(1) 对任何闭区间 $[c, d] \subset (a, b)$, $f(x)$ 在 $[c, d]$ 上 Lipschitz 连续;

(2) $f(x)$ 在 (a, b) 上仅在至多可数个点处不可导.

证明 (1) 用

$$k(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

表示 x, y 之间的割线的斜率. 对于区间 $[c, d] \subset (a, b)$, 取 $a_1 \in (a, c)$, $b_1 \in (d, b)$, 则当 $x_1, x_2 \in (c, d)$ 且 $x_1 < x_2$ 时,

$$k(a_1, c) \leq k(c, x_1) \leq k(x_1, x_2) \leq k(x_2, d) \leq k(d, b_1)$$

令常数

$$L = \max\{|k(a_1, c)|, |k(d, b_1)|\}$$

则由 f 的连续性

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [c, d]$$

(2) 注意 $f(x)$ 在 x 处一定存在单侧导数 $f'_+(x)$ 和 $f'_-(x)$, 故 $f(x)$ 在 x 处不可导当且仅当 $f'_-(x) < f'_+(x)$. 定义 $f(x)$ 的不可导点构成的集合

$$E = \{x \in (a, b) : f(x) \text{ 在 } x \text{ 处不可导}\}$$

则当 $x, y \in E$ 且 $x < y$ 时, $f'_+(x) \leq f'_-(y)$, 故

$$(f'_-(x), f'_+(x)) \cap (f'_-(y), f'_+(y)) = \emptyset \quad (1)$$

在 E 上定义映射

$$\mathcal{F}x = q \in (f'_-(x), f'_+(x)) \cap \mathbb{Q}$$

即 $\mathcal{F}$ 将 $x \in E$ 映为 $(f'_-(x), f'_+(x))$ 的任意一个有理数. 根据 (1), $\mathcal{F}$ 为单映射. 由于

$$\mathcal{F}(E) \subset \mathbb{Q}$$

是可数集, 故 E 是可数集.

2. 证明: 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 可导, 证明以下三个结论相互等价:

- (1) $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为凸函数;
- (2) $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增;
- (3) 对一切 $x_0, x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

证明 (1) 推 (2): 若 $f(x)$ 为凸函数, 则当 $x < y$ 时, 有

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$$

因此 $f'(x)$ 单调递增.

(2) 推 (3): 由 Lagrange 中值定理, 存在介于 x_0, x 之间的常数 ξ , 使得

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$$

- 当 $x > x_0$ 时, $\xi \in (x_0, x)$, $f'(\xi) \geq f'(x_0)$;
- 当 $x < x_0$ 时, $\xi \in (x, x_0)$, $f'(\xi) \leq f'(x_0)$;

因此总会有 $f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$.

(3) 推 (1): 我们来验证: 对所有 $x, y \in \mathbb{R}$ 和 $\alpha \in [0, 1]$, 都有

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

事实上,

$$\begin{aligned} f(x) - f(\alpha x + (1 - \alpha)y) &\geq f'(\alpha x + (1 - \alpha)y) \cdot (1 - \alpha)(y - x) \\ f(y) - f(\alpha x + (1 - \alpha)y) &\geq f'(\alpha x + (1 - \alpha)y) \cdot \alpha(x - y) \end{aligned}$$

消去 f' 的项后即得.

3. 是否存在函数 $f(x) \in C(\mathbb{R})$, 使得

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \neq 0$$

解 不存在. 当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 为 $\frac{1}{x}$ 的原函数, 因此

$$f(x) = \ln x + C, \quad \forall x > 0$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

4. 计算不定积分

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x - \cos^3 x} dx, \quad J = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x - \cos^3 x} dx$$

注意到

$$\begin{aligned} I + J &= \int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^3 x - \cos^3 x} dx \\ &= \int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x}{\sin^3 x - \cos^3 x} dx + \frac{1}{3} \int \frac{3 \sin^2 x \cos x + 3 \cos^2 x \sin x}{\sin^3 x - \cos^3 x} dx \\ &= \int \frac{(\sin x - \cos x)^2 (\sin x + \cos x)}{\sin^3 x - \cos^3 x} dx + \frac{1}{3} \log |\sin^3 x - \cos^3 x| \\ &= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{1 + \sin x \cos x} + \frac{1}{3} \log |\sin x - \cos x| + \frac{1}{3} \log(1 + \sin x \cos x) + C \\ &= -\log(1 + \sin x \cos x) + \frac{1}{3} \log |\sin x - \cos x| + \frac{1}{3} \log(1 + \sin x \cos x) + C \\ &= \frac{1}{3} \log |\sin x - \cos x| - \frac{2}{3} \log(1 + \sin x \cos x) \end{aligned}$$

$$I - J = x + C$$

故

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \log |\sin x - \cos x| - \frac{2}{3} \log(1 + \sin x \cos x) + C \\ J &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \log |\sin x - \cos x| - \frac{2}{3} \log(1 + \sin x \cos x) \end{aligned}$$