数学分析习题课教案(2021.12.19)

叶胥达　abneryepku@pku.edu.cn

2023 年 9 月 15 日

1. 计算下列混合型三角函数不定积分:

(1) $\int x\tan^2 x\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{x^2\sin^2 x}{(x+\sin x\cos x)^2}\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)(x\cos x+\sin x)}\mathrm{d}x$

解 (1) 注意到原积分可写为

$$\begin{aligned}I&=\int x\sin^2 x\mathrm{d}\tan x\\&=x\sin^2 x\tan x-\int \tan x(\sin^2 x+2x\sin x\cos x)\mathrm{d}x\\&=x\sin^2 x\tan x-\int \tan x\sin^2\mathrm{d}x-2\int x\sin^2 x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}I_1&=\int \tan x\sin^2 x\mathrm{d}x=\int \tan x(1-\cos^2 x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\cos 2x-\log|\cos x|+C\\I_2&=\int x\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{2}x\sin x\cos x+C\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}I&=x\sin^2 x\tan x-I_1-2I_2\\&=-\frac{x^2}{2}+x\tan x+\log|\cos x|+C\end{aligned}$$

(2) 注意到

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{x+\sin x\cos x}\right)=-\frac{2\cos^2 x}{(x+\sin x\cos x)^2}$$

因此由分部积分公式, 原积分为

$$\begin{aligned}I&=-\frac{1}{2}\int\frac{x^2\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x+\sin x\cos x}\right)\\&=-\frac{x^2\tan x^2}{2(x+\sin x\cos x)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+\sin x\cos x}\mathrm{d}(x^2\tan^2 x)\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2\tan^2 x)=2x\tan^2 x+\frac{2x^2\tan x}{\cos^2 x}=\frac{2x\sin x}{\cos^3 x}(x+\sin x\cos x)$$

因此原积分为

$$I=-\frac{x^2\tan x^2}{2(x+\sin x\cos x)}+\int\frac{x\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x \tag{1}$$

下面我们来计算不定积分

$$J=\int\frac{x\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$$

容易看出

$$\begin{aligned}J&=\int x\tan x\mathrm{d}(\tan x)\\&=x\tan^2 x-\int\left(\tan x+\frac{x}{\cos^2 x}\right)\tan x\mathrm{d}x\\&=x\tan^2 x-\int\tan^2 x\mathrm{d}x-J\\&=\frac{x}{\cos^2 x}-\tan x-J\end{aligned}$$

因此

$$J=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cos^2 x}-\tan x\right)+C \tag{2}$$

结合 (1)(2) 我们得到

$$\begin{aligned}I&=-\frac{x^2\tan x^2}{2(x+\sin x\cos x)}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cos^2 x}-\tan x\right)+C\\&=\frac{x^2+\cos x-1}{2(x+\sin x\cos x)}+C\end{aligned}$$

(3) 注意到

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)(x\sin x+\cos x)}&=\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}+\frac{x\sin x}{x\cos x-\sin x}\\&=\frac{(x\sin x+\cos x)'}{x\sin x+\cos x}-\frac{(x\cos x-\sin x)'}{x\cos x-\sin x}\end{aligned}$$

故原积分为

$$I=\log\left|\frac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}\right|+C$$

2. 计算下列混合型对数不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{\ln(3x+7)}{x^2}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}$.

解 (1) 作换元 $t = 1/x$, 则原积分

$$\begin{aligned} I &= -\int \log\left(\frac{3}{t}+7\right)\mathrm{d}t \\ &= -\int \log(3+7t)\mathrm{d}t + \int \log t\mathrm{d}t \\ &= -\left(t+\frac{3}{7}\right)\log(7t+3) + t\log t + C \\ &= \frac{3x\log x - (3x+7)\log(3x+7)}{7x} + C \end{aligned}$$

(2) 利用分部积分可得

$$\begin{aligned} I &= -\int \ln(\sin x)\mathrm{d}\cot x \\ &= -\frac{\ln\sin x}{\tan x} + \int \frac{1}{\tan^2 x}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln\sin x}{\tan x} - x - \frac{1}{\tan x} + C \end{aligned}$$