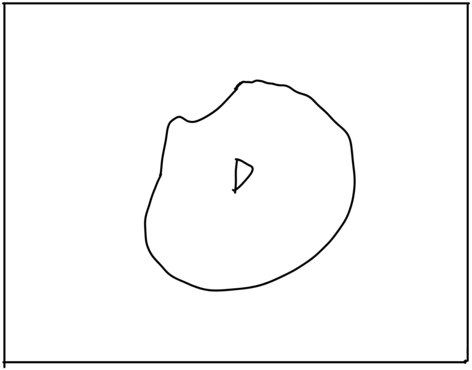
挖过孔的纸片能穿过多大的圆？

虚空若叶睦

北京大学

2025 年 5 月 26 日

问题的直观描述



在一张无穷大的纸片上挖去一个开区域 D, 那么该纸片在有限次折叠以后, 被挖去的区域的能通过的圆的最大直径是多少?

为简单起见, 假设 D 是单连通开区域且边界是分段 C^1 的.

问题的严格描述

设 D 是单连通开区域, 且边界是分段 C^1 的. 称 $f:\mathbb{R}^2\backslash D\to\mathbb{R}^3$ 是折叠映射, 如果:

1. **分段光滑性**. 存在一维分段 C^1 子流形 $\Gamma\subset\mathbb{R}^2\backslash D$, 使得

$$f\in C^0\left(\mathbb{R}^2\backslash D,\mathbb{R}^3\right)\cap C^1\left(\mathbb{R}^2\backslash(D\cup\Gamma),\mathbb{R}^3\right).$$

   即 f 整体连续且在折痕集 Γ 外 C^1 光滑.

2. **局部等距性**. 对任意 $P\in\mathbb{R}^2\backslash(D\cup\Gamma)$, 有

$$\mathrm{d}f_P^{\top}\cdot\mathrm{d}f_P=I_2,$$

   其中 $\mathrm{d}f_P\in\mathbb{R}^{3\times 2}$ 是 f 在 P 处的微分. 即 f 在未折叠区域的度量不变.

问题的严格描述

- 设 f 是关于开区域 D 的折叠映射. 定义 f 关于 D 中的直径为

$$\mathrm{Diam}(f, D) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{diam}\big(f(\gamma)\big),$$

其中 γ 是 Γ 是 $\mathbb{R}^2\backslash D$ 中围绕 D 的分段 C^1 闭曲线的集合.

- 这一定义对于 D 是非凸区域的情况也有效.
- 若开区域 D, D' 满足 $D \subset D'$, 则 $\mathrm{Diam}(f, D) \leqslant \mathrm{Diam}(f, D')$.

问题的严格描述

- 设 $\mathcal{F}$ 是关于开区域 D 的折叠映射集. 能穿过挖去区域的圆的最大直径等于

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \mathrm{Diam}(f, D).$$

即 f 关于 D 的直径的最大可能值.

- 最终答案: $\dfrac{1}{2}\mathrm{per}(\mathrm{conv}(D))$, 即 D 的凸包的周长的一半.

需要依次证明 D 是凸多边形, 一般多边形和一般开区域的情形.

第 1 步: 估计 $\mathrm{Diam}(f, D)$ 的上界

首先证明, 对一切折叠映射 $f \in \mathcal{F}$, 都有

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{Diam}(f, D) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{per}(\mathrm{conv}(D)). \qquad (*)$$

为此, 需要如下的引理:

引理

若 f 是关于单连通开区域 D (边界分段 C^1) 的折叠映射, 且存在一条分段 C^1 的曲线 $\gamma \subset \mathbb{R}^2 \backslash D$ 连接 P_1, P_2 两点, 则

$$|f(P_1) - f(P_2)| \leqslant \mathrm{len}(\gamma).$$

这里 $|\cdot|$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的欧式距离, $\mathrm{len}(\cdot)$ 指曲线的长度.

第 1 步: 估计 $\mathrm{Diam}(f, D)$ 的上界

引理的证明 设 γ 的参数形式为 $[0,1] \mapsto \mathbb{R}^2 \backslash D$, 且 $\gamma(0) = \gamma_1, \gamma(1) = \gamma_2$.

于是曲线 γ 的长度可表示为

$$\mathrm{len}(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| \mathrm{d}t.$$

在折叠映射 f 的作用下, 根据链式法则有

$$\left|(f \circ \gamma)'(t)\right| = \left|\mathrm{d}f_{\gamma(t)} \gamma'(t)\right| = \sqrt{\left(\mathrm{d}f_{\gamma(t)} \gamma'(t)\right)^{\top} \mathrm{d}f_{\gamma(t)} \gamma'(t)} = |\gamma'(t)|,$$

因此 $f(P_1)$ 和 $f(P_2)$ 间的距离可控制为

$$|f(P_1) - f(P_2)| \leqslant \mathrm{len}(f \circ \gamma) = \int_0^1 \left|(f \circ \gamma)'(t)\right| \mathrm{d}t = \int_0^1 |\gamma'(t)| = \mathrm{len}(\gamma).$$

第 1 步: 估计 $\mathrm{Diam}(f, D)$ 的上界

- 现在可以来证明

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \mathrm{Diam}(f, D) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{per}(\mathrm{conv}(D)). \tag{$*$}$$

可以不妨设 D 是凸区域, 否则可以用 D 的凸包来代替证明.

- 对给定的折叠映射 f, 根据 $\mathrm{Diam}(f, D)$ 的定义有

$$\mathrm{Diam}(f, D) \leqslant \mathrm{diam}\big(f(\partial D)\big).$$

因此, 只需证明对任意 $f \in \mathcal{F}$, 都有

$$\mathrm{diam}\big(f(\partial D)\big) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{per}(\mathrm{conv}(D)).$$

第 1 步: 估计 $\mathrm{Diam}(f, D)$ 的上界

- 存在 $Q_1, Q_2 \in f(\partial D)$, 则存在 $P_1, P_2 \in \partial D$ 使得

$$Q_1 = f(P_1), \qquad Q_2 = f(P_2).$$

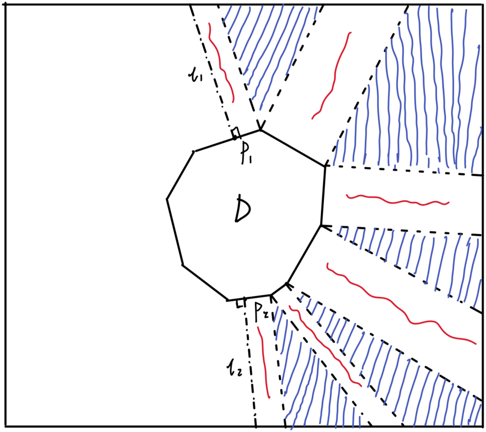
因此, 只需证明

- 由于 D 是凸集, 因此在 ∂D 一定有一条长度不超过 $\frac{1}{2}\mathrm{per}(D)$ 的曲线连接 P_1, P_2. 故

$$|Q_1 - Q_2| = |f(P_1) - f(P_2)| \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{per}(D),$$

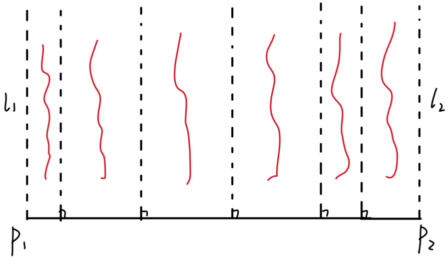
从而 $(*)$ 成立.

第 2 步: D 为凸多边形时的折叠方法



在 ∂D 上选取点 P_1, P_2, 使得 P_1, P_2 恰好平分 D 的周长. 在 P_1, P_2 处画出 ∂D 的法向射线, 分别记为 l_1, l_2. 将则只需给出 $\mathbb{R}^2 \backslash D$ 沿着 l_1, l_2 剪开, 则只需给出剩下两部分的折叠方法 (然后在粘回去).

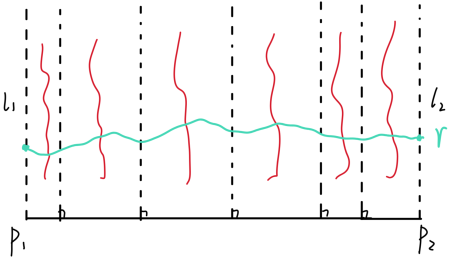
第 2 步: D 为凸多边形时的折叠方法



把 D 的每一个顶点对应的对角部分 (即上图的蓝色区域) 折到里面去, 然后把剩下的红色矩形区域粘到一起, 如左图所示. 可以看出 P_1, P_2 在折叠之后的距离恰好为 $\frac{1}{2}\mathrm{per}(D)$.

另一部分可以按照同样方式折叠, 两部分粘在一起后可得到一个符合定义的折叠方法 (或折叠映射).

第 2 步: D 为凸多边形时的折叠方法

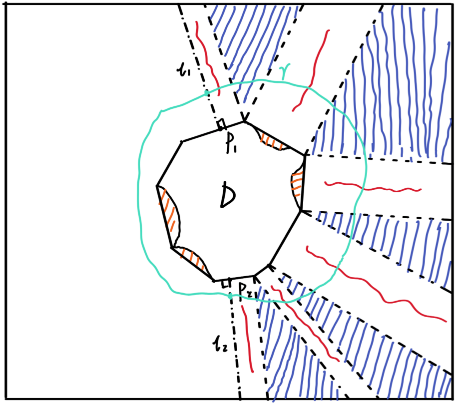


把这个折叠方法 (折叠映射) 记为 f. 注意到, 任何在 $\mathbb{R}^2 \backslash D$ 中围绕 D 的闭曲线 γ, 都一定和 l_1 和 l_2 相交. 进而, $f(\gamma)$ 一定和 $f(l_1)$ 和 $f(l_2)$ 相交.

而 $f(l_1)$ 和 $f(l_2)$ 是一对平行直线, 且距离为 $\frac{1}{2}\mathrm{per}(D)$. 因此 $\mathrm{diam}\big(f(\gamma)\big) \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{per}(D)$.

综上可得 $\mathrm{Diam}(f, D) = \frac{1}{2}\mathrm{per}(D)$.

第 3 步: D 为凹多边形的折叠方法



如果 D 是凹多边形, 则凸包 $\mathrm{conv}(D)$ 是凸多边形. 可以先把其 $\mathrm{conv}(D)$ 中包含 D 的部分 (橙色阴影) 折到里面去, 剩余部分的折叠方法可按照 $\mathrm{conv}(D)$ 的折叠方法进行.

任何在 $\mathbb{R}^2 \backslash D$ 中围绕 D 的闭曲线 γ, 都一定与 l_1, l_2 相交. 因此仍然有 $\mathrm{Diam}(f, D) = \frac{1}{2}\mathrm{per}(D)$.

第 4 步: D 为单连通开区域的折叠方法

如果 D 是一般的单连通开区域 (例如圆), 则可以取一列开多边形 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 C^1 意义下从内部逼近 D. 对任何 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $\mathbb{R}^2 \backslash D$ 上的折叠映射 f_n 使得

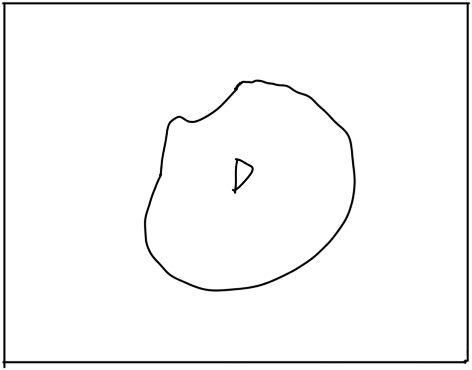
$$\mathrm{Diam}(f_n, D_n) = \frac{1}{2}\mathrm{per}(\mathrm{conv}(D_n)).$$

由于 $D_n \subset D$, 因此

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{Diam}(f, D) \geqslant \mathrm{Diam}(f_n, D) \geqslant \mathrm{Diam}(f_n, D_n) = \frac{1}{2}\mathrm{per}(\mathrm{conv}(D_n)).$$

令 $n \to \infty$ 即可得到 $\sup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{Diam}(f, D) = \frac{1}{2}\mathrm{per}(\mathrm{conv}(D)).$

最终解答



在一张无穷大的纸片上挖去一个开区域 D, 那么该纸片在有限次折叠以后, 被挖去的区域的能通过的最大圆的直径是:

$$\frac{1}{2}\mathrm{per}(\mathrm{conv}(D))$$