

非Stoltz型数列极限的计算

虚空若叶睦

2025 年 5 月 22 日

Stoltz 公式是求数列极限的一个非常好用的工具, 但似乎不是总是有效...

1. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n n^{\frac{1}{k}} = 1$.

解 将求和分为 $k \geq \ln n$ 和 $k < \ln n$ 两部分. 当 $k \geq \ln n$ 时, 有不等式

$$n^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{1}{k} \ln n} \leq \frac{3}{k} \ln n + 1,$$

因此可得

$$\sum_{k \geq \ln n} n^{\frac{1}{k}} \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{k} \ln n + 1 \right) \leq 3 \ln n (\ln n + 1) + n. \quad (1)$$

另一方面, 当 $k < \ln n$ 时, 有

$$\sum_{2 \leq k < \ln n} n^{\frac{1}{k}} \leq \sqrt{n} \ln n. \quad (2)$$

将 (1)(2) 两不等式相加即可得到

$$\frac{n-1}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n n^{\frac{1}{k}} \leq \frac{\ln n}{\sqrt{n}} + \frac{3 \ln n (\ln n + 1)}{n} + 1,$$

令 $n \rightarrow \infty$ 即得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n n^{\frac{1}{k}} = 1$.

2. 证明: 对任何 $\alpha \in (0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n n^{\frac{1}{k^\alpha}} = 1$.

解 将求和分为 $k \geq (\ln n)^{\frac{1}{\alpha}}$ 和 $k < (\ln n)^{\frac{1}{\alpha}}$ 两部分. 当 $k \geq (\ln n)^{\frac{1}{\alpha}}$ 时, 有不等式

$$n^{\frac{1}{k^\alpha}} = e^{\frac{1}{k^\alpha} \ln n} \leq \frac{3}{k^\alpha} \ln n + 1,$$

$$\sum_{k \geq \ln n} n^{\frac{1}{k}} \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{k^\alpha} \ln n + 1 \right) \leq C_\alpha n^{1-\alpha} \ln n + n. \quad (1)$$

另一方面, 当 $k < (\ln n)^{\frac{1}{\alpha}}$ 时, 有

$$\sum_{2 \leq k < (\ln n)^{\frac{1}{\alpha}}} n^{\frac{1}{k^\alpha}} \leq n^{\frac{1}{2^\alpha}} (\ln n)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (2)$$

将 (1)(2) 两不等式相加即可得到

$$\frac{n-1}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n n^{\frac{1}{k}} \leq \frac{(\ln n)^{\frac{1}{\alpha}}}{n^{1-\frac{1}{2^\alpha}}} + C_\alpha \frac{\ln n}{n^\alpha} + 1,$$

令 $n \rightarrow \infty$ 即得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n n^{\frac{1}{k}} = 1$.

3. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n n^{\frac{1}{\log_2 k}} = 3$.

证明 首先, 容易看出

$$\frac{1}{n} \left(n + \sum_{k=3}^n n^{\frac{1}{\log_2 k}} \right) \geq 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=3}^n n^{\frac{1}{\log_2 n}} = 1 + \frac{2(n-2)}{n},$$

因此数列的下极限至少为 3.

另一方面,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=5}^n n^{\frac{1}{\log_2 k}} &= \int_4^n n^{\frac{1}{\log_2 \lceil x \rceil}} dx \leq \int_4^n n^{\frac{1}{\log_2 x}} dx \\
&= \int_2^{\log_2 n} n^{\frac{1}{y}} d(2^y) \quad (\text{换元 } x = 2^y) \\
&= n^{\frac{1}{y}} 2^y \Big|_{y=2}^{\log_2 n} - \int_2^{\log_2 n} 2^y d(n^{\frac{1}{y}}) \quad (\text{分部积分}) \\
&= 2n - 4\sqrt{n} + \ln n \int_2^{\log_2 n} \frac{1}{y^2} 2^y n^{\frac{1}{y}} dy \\
&= 2n - 4\sqrt{n} + \log_2 n \int_2^{\log_2 n} \frac{1}{y^2} n^{\frac{1}{y}} d2^y \\
&= 2n - 4\sqrt{n} + \log_2 n \left[\frac{1}{y^2} n^{\frac{1}{y}} 2^y \Big|_{y=2}^{\log_2 n} - \int_2^{\log_2 n} 2^y d\left(\frac{1}{y^2} n^{\frac{1}{y}}\right) \right] \quad (\text{分部积分}) \\
&= 2n - 4\sqrt{n} + \frac{2n}{\log_2 n} - \sqrt{n} \log_2 n + \log_2 n \int_2^{\log_2 n} \left(\frac{2}{y^3} + \frac{\ln n}{y^4} \right) n^{\frac{1}{y}} 2^y dy \\
&= 2n - 4\sqrt{n} + \frac{2n}{\log_2 n} - \sqrt{n} \log_2 n + 2 \log_2 n \cdot I_n + \frac{(\log_2 n)^2}{\log_2 e} \cdot J_n, \quad (1)
\end{aligned}$$

其中 I_n 和 J_n 分别为

$$I_n = \int_2^{\log_2 n} \frac{1}{y^3} n^{\frac{1}{y}} 2^y dy, \quad J_n = \int_2^{\log_2 n} \frac{1}{y^4} n^{\frac{1}{y}} 2^y dy.$$

为估计 I_n , 注意到有等式

$$\frac{1}{y^3} n^{\frac{1}{y}} 2^y = \exp\left(y \ln 2 + \frac{1}{y} \ln n - 3 \ln y\right).$$

定义函数

$$f(y) = y \ln 2 + \frac{1}{y} \ln n - 3 \ln y,$$

则有

$$f''(y) = \frac{2}{y^3} \ln n + \frac{3}{y^2} > 0,$$

因此 $f(y)$ 在 $[2, \log_2 n]$ 上为凸函数, $\exp(f(y))$ 的最大值在 $y = 2$ 或 $\log_2 n$ 处取到,

$$\frac{1}{y^3} 2^y n^{\frac{1}{y}} \leq \max \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{n}, \frac{2n}{(\log_2 n)^3} \right\} \implies I_n \leq \max \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{n}, \frac{2n}{(\log_2 n)^3} \right\} (\log_2 n - 2). \quad (2)$$

类似地, 对 J_n 有不等式

$$\frac{1}{y^4} 2^y n^{\frac{1}{y}} \leq \max \left\{ \frac{1}{4} \sqrt{n}, \frac{2n}{(\log_2 n)^4} \right\} \Rightarrow J_n \leq \max \left\{ \frac{1}{4} \sqrt{n}, \frac{2n}{(\log_2 n)^4} \right\} (\log_2 n - 2) \quad (2)$$

综合不等式 (1)(2)(3) 可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=5}^n n^{\frac{1}{\log_2 k}} &\leq 2n - 3\sqrt{n} + \frac{2n}{\log_2 n} - \sqrt{n} \log_2 n \\ &\quad + \left(\max \left\{ \sqrt{n} \log_2 n, \frac{4n}{(\log_2 n)^2} \right\} + \frac{1}{\log_2 e} \max \left\{ \frac{1}{4} \sqrt{n} (\log_2 n)^2, \frac{2n}{(\log_2 n)^2} \right\} \right) (\log_2 n - 2). \end{aligned}$$

因此, 我们有不等式估计

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n n^{\frac{1}{\log_2 k}} &\leq 3 + \frac{1}{n^{1-\frac{1}{\log_2 3}}} - \frac{3 + \log_2 n}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\log_2 n} \\ &\quad + \left(\max \left\{ \frac{\log_2 n}{\sqrt{n}}, \frac{4}{(\log_2 n)^2} \right\} + \frac{1}{\log_2 e} \max \left\{ \frac{1}{4\sqrt{n}} (\log_2 n)^2, \frac{2}{(\log_2 n)^2} \right\} \right) (\log_2 n - 2). \end{aligned}$$

因此数列的上极限也是 3. 原数列与其上界的图像如下图所示:

