清华新生2024年春季数理基础大赛部分题目解析

虚空若叶睦

2025 年 5 月 10 日

A5 设 f, g 都是 $[0, +\infty)$ 上正的单调递减函数, 且反常积分 $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^\infty g(x)\mathrm{d}x$ 都发散, 试问 $\int_0^\infty \min\{f(x), g(x)\}\mathrm{d}x$ 是否一定发散. 如果是, 请给出证明; 如果否, 请给出反例.

分析 根据经验, 要求证明或给出反例的问题基本都是有反例的. 在这个问题中, 如果想要 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的积分发散而 $\min\{f(x), g(x)\}$ 的积分收敛, 则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 应该交替取最小值. 基于这个想法, 可以将 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都取成分段常数函数, 而每一段的函数值和区间长度由参数控制.

解 设 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ 是正的单调递减数列, 对应函数在每一分段的函数值; 而 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是正数数列, 对应每一分段的区间长度. 按照如下表格定义函数 $f(x)$ 和 $g(x)$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$
$f(x)$	a_0	a_2	a_2	a_4	$\cdots$
$g(x)$	a_1	a_1	a_3	a_3	$\cdots$

也就是说, $f(x)$ 在长度为 $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots$ 的区间上的值分别为 $a_0, a_2, a_2, a_4, \cdots$, 而 $g(x)$ 在长度为 $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots$ 的区间上的值分别为 $a_1, a_1, a_3, a_3, \cdots$. 于是可得

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x \geqslant \sum_{n\text{ 是奇数}} a_{n-1}x_n = a_0x_1 + a_2x_3 + a_4x_5 + \cdots,$$

$$\int_0^\infty g(x)\mathrm{d}x \geqslant \sum_{n\text{ 是偶数}} a_{n-1}x_n = a_1x_2 + a_3x_4 + a_5x_6 + \cdots,$$

$$\int_0^\infty \min\{f(x), g(x)\}\mathrm{d}x = \sum_n a_nx_n = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots.$$

要使得 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的积分发散, 而 $\min\{f(x), g(x)\}$ 的积分收敛, 只需满足不等式

$$a_nx_n \leqslant \frac{1}{n^2}, \qquad a_{n-1}x_n \geqslant \frac{1}{n}, \qquad \forall x \in \mathbb{N}.$$

欲满足上述不等式, 只需取

$$a_n = \frac{1}{n!}, \qquad x_n = \frac{(n-1)!}{n}. \qquad \blacksquare$$

A7 假设 $f \in C^1(\mathbb{R})$ 满足 $f > 0$ 和 $f'(x) = f(x-1)$, 试求 f.

分析 先来猜问题的解. 由于方程关于 f 线性, 可以不妨设 $f(0) = 1$. 由于 $f'(x) = f(x)$ 的解是 $f(x) = e^x$, 可以自然地猜测 $f(x)$ 具有 e^{ax} 的指数函数的形式. 代入计算可得 $a = e^{-a}$, 这个关于 a 的方程存在唯一解. 不过, 证明 $f(x) = e^{ax}$ 是唯一的可行解并非易事, 需要通过构造函数迭代的不动点关系来求解. 另外, 尽管容易验证 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上解析, 但是 $f(x)$ 的 Taylor 展开式对本题基本没有帮助.

解 首先, 容易发现 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 均在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递增, 从而 $f(x)$ 为凸函数. 根据凸性,

$$f(x-1) = f'(x) \geqslant f(x) - f(x-1),$$

因此可得 $f(x-1) \geqslant \frac{1}{2} f(x)$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 成立. 下面定义函数

$$g(x) = \log f(x),$$

则根据条件可以得到

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f(x-1)}{f(x)} = \exp(g(x-1) - g(x)), \tag{1}$$

于是 $\frac{1}{2} \leqslant g'(x) \leqslant 1$ 恒成立.

任取一 $x_0 \in \mathbb{R}$, 在 (1) 的右端使用微分中值定理, 存在 $x_1 \in (x_0 - 1, x_0)$ 使得

$$g'(x_0) = \exp\bigl(-g'(x_1)\bigr).$$

设 a 是方程 $a = e^{-a}$ 的解, 则 $a \geqslant \frac{1}{2}$. 根据中值定理, 存在介于 a 和 $g'(x_1)$ 之间的数 ξ_1 使得

$$g'(x_0) - a = \exp\bigl(-g'(x_1)\bigr) - \exp(-a) = -\exp(-\xi_1)(g'(x_1) - a).$$

由于 $\xi_1 \geqslant \frac{1}{2}$, 从上面的等式可得到不等式

$$|g'(x_0) - a| \leqslant e^{-\frac{1}{2}} |g'(x_1) - a|.$$

根据归纳法, 对每个整数 $n \geqslant 0$, 都存在 $x_{n+1} \in (x_n - 1, x_n)$ 使得

$$|g'(x_n) - a| \leqslant e^{-\frac{1}{2}} |g'(x_{n+1}) - a|, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{2}$$

因此, 由递推关系 (2) 可以得到

$$|g'(x_0) - a| \leqslant e^{-\frac{n}{2}} |g'(x_n) - a| \leqslant e^{-\frac{n}{2}} (a + 1), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

令 $n \to \infty$ 即得 $g'(x_0) = a$. 由于 x_0 的取值是任意的, 因此由 $g'(x) \equiv a$ 可得到

$$f(x) = Ce^{ax}, \qquad C > 0. \qquad \blacksquare$$

A8 假设 $\alpha > -1$, 证明: 存在只依赖于 α 的常数 $C_1, C_2 > 0$, 使得

$$C_1 |x|^\alpha e^{-|x|} \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2} |t|^\alpha e^{-|t|} \mathrm{d}t \leqslant C_2 |x|^\alpha e^{-|x|}$$

对任何 $|x| \geqslant 8$ 成立.

分析 这种题目用到的技巧不难, 但需要用到的分类讨论非常麻烦. 我认为这道题的水准与 Ave Mujica 的剧情水平相当, 分一堆基本没啥关系的情况讨论然后包汉堡就行了.

解 不妨设 $x > 0$. 只需要证明,

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2} \frac{|t|^\alpha}{x^\alpha} e^{-(|t| - x)} \mathrm{d}t$$

在 $x \to \infty$ 时有正的上下极限. 根据 $t > 0$ 和 $t < 0$ 的情况, 可以将 $I(x)$ 写为 $I_+(x) + I_-(x)$,

$$I^+(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-t)^2} \frac{t^\alpha}{x^\alpha} e^{-(t-x)} \mathrm{d}t, \qquad I^-(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+t)^2} \frac{t^\alpha}{x^\alpha} e^{-(t-x)} \mathrm{d}t.$$

于是可以看出 $I_+(x) \geqslant I_-(x) \geqslant 0$, 从而只需证明 $I_+(x)$ 有正的上下极限.

接着, 把 $I_+(x)$ 拆分为 $I_+^1(x) + I_+^2(x)$, 其中

$$I_1^+(x) = \int_0^x e^{-(t-x)^2 - (t-x)} \frac{t^\alpha}{x^\alpha} \mathrm{d}t, \qquad I_2^+(x) = \int_x^{+\infty} e^{-(t-x)^2 - (t-x)} \frac{t^\alpha}{x^\alpha} \mathrm{d}t.$$

下面我们来证明 $I_2^+(x)$ 有正的上下极限. 将 $I_2^+(x)$ 改写为

$$I_2^+(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - t} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^\alpha \mathrm{d}t. \tag{1}$$

取正整数 $n \geqslant \alpha$, 则容易看出当 $x \geqslant 1$ 时, 必然有

$$I_2^+(x) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2}(1+t)^n \mathrm{d}t < +\infty.$$

为估计 $I_2^+(x)$ 的下界, 由 $\alpha > -1$ 可得不等式

$$\left(1+\frac{t}{x}\right)^{\alpha} \geqslant \left(1+\frac{t}{x}\right)^{-2} \geqslant 1-\frac{2t}{x},$$

因此由 (1) 可以得到

$$I_2^+(x) \geqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2-t}\left(1-\frac{2t}{x}\right)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}-\frac{2}{x}\int_0^{+\infty} te^{-t^2-t}\mathrm{d}t,$$

从而在 $x \to \infty$ 时有

$$\varliminf_{x\to\infty} I_2^+(x) \geqslant \frac{1}{2}, \qquad \varlimsup_{x\to\infty} I_2^+(x) < +\infty. \tag{2}$$

基于结果 (2), 我们只需再证明$I_1^+(x)$ 有正的上极限. 作换元 $t \to tx$, 可得

$$I_1^+(x) = x\int_0^1 e^{-x^2(t-1)^2-x(t-1)} t^{\alpha}\mathrm{d}t.$$

再次作换元 $t \to 1-t$, 有

$$I_1^+(x) = x\int_0^1 e^{-x^2t^2+xt}(1-t)^{\alpha}\mathrm{d}t. \tag{3}$$

注意当 $-1<\alpha<0$ 时, $I_1^+(x)$ 在 $t=1$ 处为反常积分. 为了估计 (3) 中 $I_1^+(x)$ 的上界, 注意到

$$x\int_0^1 e^{-x^2t^2+xt}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2+t}\mathrm{d}t \leqslant 2,$$

再利用不等式 $ae^{-a^2+a} \leqslant 1$, 可得到

$$\begin{aligned} I_1^+(x) &\leqslant 2 + x\int_0^1 e^{-x^2t^2+xt}\big[(1-t)^{\alpha}-1\big]\mathrm{d}t \\ &\leqslant 2 + \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha}-1}{t}\mathrm{d}t \qquad (\text{被积函数在 } t=0 \text{ 处连续}) \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

因此在 $x \to \infty$ 时有

$$\varliminf_{x\to\infty} I_1^+(x) \geqslant 0, \qquad \varlimsup_{x\to\infty} I_1^+(x) < +\infty. \tag{4}$$

结合 (2)(4) 可知原命题得证. ■

O 给定实数 $\lambda > 0$, 假设 $f \in C^\infty([a,b])$ 是区间 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上的实值光滑函数, 并定义积分

$$I = \int_a^b e^{if(x)}\mathrm{d}x.$$

(1) 设 $|f'(x)| \geqslant \lambda$ 对任意 $x \in [a,b]$ 成立, 且 $f'(x)$ 单调. 证明存在常数 $c > 0$ 使得 $|I| \leqslant \dfrac{c}{\lambda}$.

(2) 设 $|f''(x)| \geqslant \lambda$ 对任意 $x \in [a,b]$ 成立. 证明存在常数 $c > 0$ 使得 $|I| \leqslant \dfrac{c}{\sqrt{\lambda}}$.

分析 本题实质上是要证明 Riemann–Lebesgue 引理. 在 (2) 中, 可以先考虑 $e^{i\lambda x^2}$ 的积分.

解 (1) 不妨设 $f'(x) \geqslant \lambda > 0$ 在 $[a,b]$ 上恒成立. 利用分部积分, 有

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b e^{if(x)}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}e^{if(x)} \\ &= \frac{1}{f'(b)}e^{if(b)} - \frac{1}{f'(a)}e^{if(a)} - \int_a^b e^{if(x)}\mathrm{d}\left(\frac{1}{f'(x)}\right). \end{aligned}$$

由于 $1/f'(x)$ 是单调函数, 因此上式中的积分可解释为 Riemann-Stieltjes 积分. 于是

$$|I| \leqslant \frac{1}{|f'(b)|} + \frac{1}{|f'(a)|} + \left|\int_a^b \mathrm{d}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\right| \leqslant \frac{4}{\lambda}.$$

因此只需取 $c = 4$ 即可使不等式成立.

(2) 不妨设 $f''(x) \geqslant \lambda > 0$ 恒成立, 于是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是强凸的. 先不妨设 $f(x)$ 在 $x_0 \in (a,b)$ 处取最小值. 现在, 把区间 $[a,b]$ 分成三段区域:

$$D_1 = \left[a, x_0 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right], \quad D_2 = \left[x_0 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, x_0 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right], \quad D_3 = \left[x_0 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, b\right],$$

并且定义 I_1, I_2, I_3 为 $e^{if(x)}$ 在这三段上的积分. 由于区间 I_2 的长度均为 $\dfrac{2}{\sqrt{\lambda}}$, 因此自然地有 $I_2 \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{\lambda}}$. 为了估计 I_3, 注意到由于 $f'(x) \geqslant \lambda$, 在 $x \in D_3$ 时有

$$f'(x) = f'(x_0) + \int_{x_0}^x f''(y)\mathrm{d}y \geqslant 0 + \lambda(x - x_0) \geqslant \sqrt{\lambda},$$

因此依结论 (1)有 $|I_3| \leqslant \dfrac{4}{\sqrt{\lambda}}$. 同理有 $|I_1| \leqslant \dfrac{4}{\sqrt{\lambda}}$. 于是

$$|I| \leqslant |I_1| + |I_2| + |I_3| \leqslant \frac{4}{\sqrt{\lambda}} + \frac{2}{\sqrt{\lambda}} + \frac{4}{\sqrt{\lambda}} = \frac{10}{\sqrt{\lambda}},$$

因此只需取常数 $c = 10$ 即可使不等式成立.

如果 $f(x)$ 没有在 (a,b) 上的某一点取最小值, 则 $f(x)$ 一定在 $[a,b]$ 上单调递减或单调上升. 在递减和递增的情况下, 分别取 $x_0 = b$ 和 $x_0 = a$ 依然可以完成上述证明. ■

C 设 f 是定义在 Cantor 集 C (定义 $I_0 = [0,1]$, I_{n+1} 为 I_n 中 2^n 个不交的闭区间分别去掉中间三分之一得到的 2^{n+1} 个闭区间的并, C 为所有 I_n 的交) 上的连续函数, 并且 f 的像集是不可数的. 证明: 存在 C 的与 $\mathbb{R}$ 等势的子集 I (即: 存在 $\mathbb{R}$ 到 I 的双射), 使得 f 在 I 上是严格单调的.

分析 本题太过抽象, 拼尽全力无法战胜... 在解答本题前, 需要了解以下知识:

- 可数集和 $\mathbb{Z}$ 的势是 $\aleph_0$, 不可数集是指一切不与 $\mathbb{Z}$ 等势的无穷集.
- $\mathbb{R}$ 的势是 $\aleph_1$, 它和自然数集的所有子集等势. $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{Z}$ 不等势, 即 $\aleph_0 < \aleph_1$.
- 连续统假设是指 $\aleph_0$ 和 $\aleph_1$ 之间没有其它的集合的势. 连续统假设与常用的 ZFC 公理系统独立. 本题不需要用到连续统假设.
- Cantor 集是不可数集, 且与 $\mathbb{R}$ 等势. Cantor 集的 Lebesgue 测度为 0.
- Cantor 集是三进制下只包含数字 $\{0,2\}$ 的小数.
- Cantor 集是有界闭集 (紧集).
- Cantor 集是自相似的, 且分形维数为 $\log_3 2 \approx 0.6309$.
- f 在 C 上连续, 是指对任意 $x_0 \in C$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得

  $$f\big((x_0-\delta, x_0+\delta) \cap C\big) \subset \big(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\big).$$

  f 在 C 上有界且满足一致连续的条件.

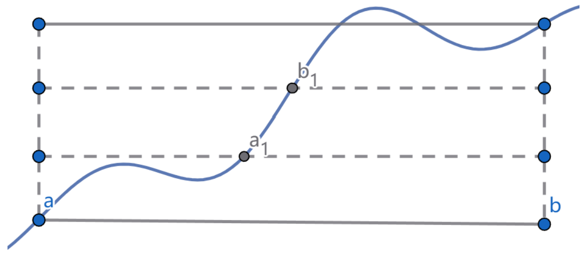
由于 Cantor 集的性质比较复杂, 可以先考虑一个稍简单的版本:

C' 设 f 是定义在区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 且不恒为常数. 证明: 存在 $[a,b]$ 的与 $\mathbb{R}$ 等势的子集 I, 使得 f 在 I 上是严格单调的.

不失一般性, 假设 $f(a) < f(b)$. 下面证明存在一个与 $\mathbb{R}$ 等势的子集 I, 使得 f 在 I 上严格单调递增. 为此需要如下的引理:

引理 0 设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且 $f(a) < f(b)$, 则存在常数 $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ 使得 $a < a_1 < b_1 < b$ 及 $f(a) < f(a_1) < f(b_1) < f(b)$, 且存在常数 c 使得

$$f([a,a_1]) \subset \{x < c\}, \qquad f([b_1,b]) \subset \{x > c\}.$$

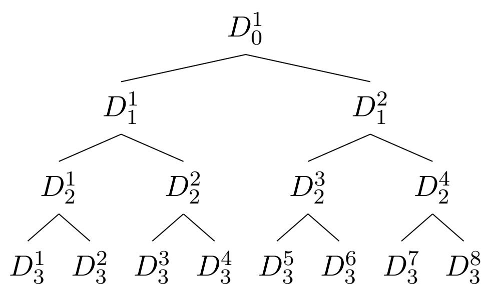


根据介值定理, 我们可以取 a_1 和 b_1 分别为

$$a_1 = \min\left\{x \in [a,b] : f(x) = \frac{2f(a)+f(b)}{3}\right\}, \quad b_1 = \max\left\{x \in [a,b] : f(x) = \frac{f(a)+2f(b)}{3}\right\},$$

于是当 $x \in [a, a_1]$ 时总有 $f(x) \leqslant f(a_1) = (2f(a)+f(b))/3$, 当 $x \in [b_1, b]$ 时总有 $f(x) \geqslant f(b_1) = (f(a)+2f(b))/3$. 从而 a_1, b_1 满足引理 0 的要求.

为证明 **C'**, 定义区间 $D_0^1 = [a,b]$, 根据引理可以将其分为不交的闭区间 $D_1^1 = [a, a_1]$ 和 $D_1^2 = [b_1, b]$. 一般的, 对于不交的闭区间组 $\{D_n^j\}_{j=1}^{2^n}$, 可以对每个 D_n^j 应用引理, 并将其分为闭区间 D_{n+1}^{2j-1} 和 D_{n+1}^{2j}. 这样从 D_0^1 出发可以得到一个类似于 Cantor 集的无穷树状图:



且对每个正整数 n, 值域 $\{f(D_n^j)\}_{j=1}^{n}$ 依次严格递增. 在该树状图的每个可能向下的分支序列 (例如, $D_0^1 - D_1^1 - D_2^2 - D_3^4 - D_4^7 - \cdots$) 中取一个代表元, 组成集合 I. 各个分支的非空性是由闭区间套定理保证的, 而集合 I 的可构造性是由选择公理保证的. (这里一个更直观的构造方式是令 $D_n = \cup_{j=1}^{2^n} D_n^j$, 然后取 $I = \cap_{n=1}^{\infty} D_n$. 不过, 这种方式可能导致有的分支序列是一个闭区间而不是孤立点, 于是 f 在该区间上的单调难以说明)

类似于 Cantor 集的定义, I 中的每个元素都与 $[0,1]$ 中的二进制小数一一对应, 从而 I 与 $\mathbb{R}$ 等势. 为了验证 f 在 I 上严格递增, 只需注意到对任意满足 $x_1 < x_2$ 的 $x_1, x_2 \in I$, 存在最小的正整数 n 使得 x_1 和 x_2 在第 n 位上不一样, 即对某个 $j \in \{1, \cdots, 2^{n-1}\}$, 有

$$x_1 \in D_n^{2j-1}, \quad x_2 \in D_n^{2j},$$

从而 $f(x_1) < f(x_2)$. 引理 0 得证.

在解决了闭区间上的简单版本 **C'** 后, 考察原问题 **C** 在 Cantor 集 C 上的连续函数. 与闭区间的版本相比, C 上的连续函数的一个明显的困难的是它并不满足介值定理. 因此, $f(a) < f(b)$ 并不意味着在 f 一定在某个子集 I 严格递增. 为此, 我们必须放弃在构造 D_1^1, D_1^2 时大小关系性质 $f(D_1^1) < f(D_2^2)$. 另外, f 的像集是不可数集也不是一个容易利用的条件. 为解决原问题, 我们需要用到下面的两个引理:

引理 1 设 $E \subset \mathbb{R}$ 是有界的不可数集. 则存在 $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ 使得 $a_1 < b_1$, 且 $E \cap \{x < a_1\}$ 和 $E \cap \{x > b_1\}$ 均为不可数集.

引理 1 可以用反证法证明. 假设 $E \subset D_0 = [a, b]$. 取 $a_1 = (2a+b)/3 < b_1 = (a+2b)/3$, 则 $E \cap \{x < a_1\}$ 和 $E \cap \{x > b_1\}$ 中至少有一个为可数集. 若 $E \cap \{x < a_1\}$ 为可数集, 则取 $D_1 = [a_1, b]$; 若 $E \cap \{x > b_1\}$ 为可数集, 则取 $D_1 = [a, b_1]$. 在两种情况下, 都有如下结果: D_1 的长度为 D_0 的 2/3, 且 $E \cap (D_0 \backslash D_1)$ 为可数集.

按上述构造, 对每个闭区间 D_n, 都可以构造区间 D_{n+1} 使得 D_{n+1} 的长度为 D_n 的 2/3, 且 $E \cap (D_n \backslash D_{n+1})$ 为可数集. 由闭区间套定理, 存在唯一的 x_0 使得 $\{x_0\} = \cap_{n=0}^{\infty} D_n$. 于是

$$D_0 = [a, b] = \{x_0\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} (D_n \backslash D_{n+1}),$$

因此对集合 E 有

$$E \subset \{x_0\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} E \cap (D_n \backslash D_{n+1}).$$

注意上式右端的每一项都是可数集, 因此 E 是可数集, 矛盾!

引理 2 设 $D \subset \mathbb{R}$ 是有界闭集, f 在 D 上连续, 且 $f(D)$ 为不可数集. 则存在 D 的两个闭子集 D_1, D_2, 使得

- D_1, D_2 在 $\mathbb{R}$ 上是分离的 (存在 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $D_1 < c < D_2$ 或 $D_2 < c < D_1$).
- $f(D_1), f(D_2)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是分离的 (存在 $c' \in \mathbb{R}$ 使得 $f(D_1) < c' < f(D_2)$ 或 $f(D_2) < c' < f(D_1)$).
- $f(D_1)$ 和 $f(D_2)$ 均为不可数集.

引理 2 可视为引理 0 的变种, 它要求 D_1, D_2 分离以及 $f(D_1), f(D_2)$ 分离, 目的就是将来验证 f 的严格单调特性. 为证明引理 2, 令 $E = f(D)$ 为 f 的像集, 则 E 为有界闭集 (紧集上

的连续函数有界) 且为不可数集. 根据引理 1, 存在 $a_1 < b_1$ 使得 $E_1 = E \cap \{x \leqslant a_1\}$ 和 $E_2 = E \cap \{x \geqslant b_1\}$ 均为闭的不可数集. 接着, 定义

$$F_1 = f^{-1}(E_1) = \{x \in D : f(x) \in E_1\}, \quad F_2 = f^{-1}(E_2) = \{x \in D : f(x) \in E_2\},$$

则 F_1, F_2 为不交的闭集 (对于连续函数 f, 闭集的原像是闭集), 且满足引理 2 中的后两条.

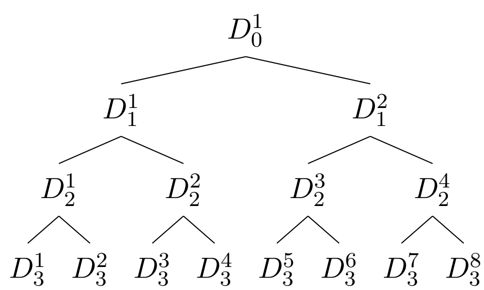
下面我们希望改造 F_1 和 F_2 使之也满足第一条, 即两个集合是分离的. 对于集合 F_1 来说, 必然存在 $x_1 \in F_1$, 使得对任意 $\delta > 0$, $f(F_1 \cap (x_1 - \delta, x_1 + \delta))$ 均为不可数集. 如果这样的 x_1 不存在, 则对任意 $x \in F_1$, 都存在 $\delta > 0$, 使得 $f(F_1 \cap (x - \delta, x + \delta))$ 为可数集. 根据紧集上的有限覆盖定理, 存在一组有限的 $\{(x_\lambda, \delta_\lambda)\}_\lambda$ 使得

$$F_1 \subset \bigcup_\lambda (x_\lambda - \delta_\lambda, x_\lambda + \delta_\lambda) \implies E_1 = f(F_1) \subset \bigcup_\lambda f\big(F_1 \cap (x_\lambda - \delta_\lambda, x_\lambda + \delta_\lambda)\big).$$

但上式的右端是有限个可数集的并, 因此 E_1 是可数集, 矛盾! 因此符合要求的 $x_1 \in F_1$ 必然存在. 类似的, 必然存在 $x_2 \in F_2$, 使得对任意 $\delta > 0$, $f(F_2 \cap (x_2 - \delta, x_2 + \delta))$ 均为不可数集.

最后, 我们取 $\delta = \frac{|x_1 - x_2|}{3}$, 以及 $D_1 = F_1 \cap (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ 和 $D_2 = F_2 \cap (x_2 - \delta, x_2 + \delta)$. 则 D_1, D_2 被 $\frac{x_1 + x_2}{2}$ 分离, 且 $f(D_1), f(D_2)$ 均为不可数集. 引理 2 得证.

解 回到原问题 **C** 的证明. 令 D_0^1 为 Cantor 集 C, 则 D_0^1 为有界闭集且 $f(D_0^1)$ 不可数. 据引理 2, 存在 D_0^1 的两个闭子集 D_1^1, D_1^2, 使得 D_1^1 在 $\mathbb{R}$ 上位于 D_1^2 的左侧, 且 $f(D_1^1)$ 和 $f(D_1^2)$ 是分离的不可数集. 一般的, 对任何非负整数 n 及正整数 $j \in \{1, \cdots, 2^n\}$, 存在 D_n^j 的两个闭子集 $D_{n+1}^{2j-1}, D_{n+1}^{2j}$, 使得 D_{n+1}^{2j-1} 位于 D_{n+1}^{2j} 的左侧, 且 $f(D_{n+1}^{2j-1})$ 和 $f(D_{n+1}^{2j})$ 是分离的不可数集. 如此这般我们再次得到了类似引理 0 证明当中的无穷树状图:



不过, 这里一个关键的区别是, 像集 $f(D_{n+1}^{2j-1})$ 和 $f(D_{n+1}^{2j})$ 的大小关系是不确定的, 无法直接利用分支序列来构造集合 I. 不过, 我们仍可以通过抽取部分分支序列的方式来构造 I. 对于非负整数 n 和正整数 $j \in \{1, \cdots, 2^n\}$, 称 (n, j) 是 "左小右大" 的, 如果 $f(D_{n+1}^{2j-1}) <$

$f(D_{n+1}^{2j})$; 否则是“左大右小”的. 如果树状图中存在某一个节点 (n, j) 使得 (n, j) 与其所有子节点都是“左大右小”的, 则可以按照引理 0 的方法构造 I (需用到闭集套定理) 并验证 f 在 I 上严格单调递减. 否则, 任意节点 (n, j) 自身或者有一个子节点 (n', j') 是“左小右大”的. 现在, 在树状图上把所有非“左小右大”的节点 (n, j) 都替换为其“左小右大”的节点, 子节点也做相应的替换. 这样就可以得到一个全部节点都是“左小右大”的树状图, 从而可以构造 I 使得 f 在 I 上严格单调递增. 于是原命题得证. ■