

清华大学求真书院 2025 年春季博士资格考试 (分析部分)

虚空若叶睦

2025 年 5 月 19 日

1. (10 pts) Compute the Fourier transform $\hat{u}(\xi)$ of $u(x) = \frac{x}{1+x^2}$. (Here we use the following definition for the Fourier transform of L^1 functions

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx$$

and extend to tempered distributions.)

分析 先来回顾缓增函数的定义.

(1) 在泛函分析中, Schwartz 空间是一切光滑且任意阶导数以多项式速率衰减的函数:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) : \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n \varphi^{(m)}(x)| < \infty \text{ 对任何非负整数 } n, m \geq 0 \text{ 成立} \right\},$$

也称为[速降函数空间](#). 等价地说, 当 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 时, φ 的 n, m -范数

$$\|\varphi\|_{n,m} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n \varphi^{(m)}(x)|$$

都是有限的. 接着, 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上可以定义一个度量

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{n,m=0}^{\infty} 2^{-n-m} \frac{\|\varphi - \psi\|_{n,m}}{1 + \|\varphi - \psi\|_{n,m}},$$

则 $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), d)$ 是完备度量空间 (但不是 Banach 空间), 且在 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 中有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k - \varphi\|_{n,m} = 0 \text{ 对任何整数 } n, m \geq 0 \text{ 成立}.$$

(2) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上的一个线性泛函 $f : \varphi \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ 是连续的, 如果存在正整数 N 使得

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \sum_{0 \leq n, m \leq N} \|\varphi\|_{n,m}.$$

一般地, 定义 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上所有连续线性泛函的空间 (即对偶空间):

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) := \{f: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ 在 } \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ 上线性且连续}\},$$

并称为**缓增函数空间**.

(3) Fourier 变换 $\mathcal{F}: u \rightarrow \hat{u}$ 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上的连续映射. 于是对任何 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, 可定义 f 的 Fourier 变换为满足

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

的函数 $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. 于是 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ 上的线性映射.

不过, 以上定义对于解题的直接帮助不大, 本题的切入口主要是

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2+1} e^{-ix\xi} dx = i \frac{d}{d\xi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1} e^{-ix\xi} dx,$$

因此只需先求出 $(x^2+1)^{-1}$ 的 Fourier 变换再对 ξ 求导.

解 我们首先来计算 $(x^2+1)^{-1}$ 的 Fourier 变换, 即

$$F(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1} e^{-ix\xi} dx.$$

容易看出上述积分对一切 $\xi \in \mathbb{R}$ 都绝对收敛. 下面介绍两种计算 $F(\xi)$ 的方法.

(1) 首先, 可以把 $F(\xi)$ 等价地写为

$$F(\xi) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos(\xi x)}{x^2+1} dx.$$

注意到 $(x^2+1)^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-t(x^2+1)} dt$, 于是 $F(\xi)$ 可计算为

$$\begin{aligned} F(\xi) &= 2 \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-t(x^2+1)} dt \right) \cos(\xi x) dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \cos(\xi x) e^{-tx^2} dx \right) e^{-t} dt \quad (\text{交换次序}) \\ &= \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t-\frac{\xi^2}{4t}} dt = 2\sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u^2-\frac{\xi^2}{4u^2}} du. \quad (\text{换元 } t = u^2) \end{aligned}$$

为计算最后一项的积分, 定义

$$G(a) = \int_0^{\infty} e^{-u^2-\frac{a}{u^2}} du,$$

则 $F(\xi) = 2\sqrt{\pi}G(\frac{\xi^2}{4})$, 且 $G(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 注意到

$$G'(a) = - \int_0^\infty \frac{1}{u^2} e^{-u^2 - \frac{a}{u^2}} du,$$

从而有

$$\begin{aligned} G(a) + \sqrt{a}G'(a) &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{\sqrt{a}}{u^2}\right) e^{-u^2 - \frac{a}{u^2}} du \\ &= \int_0^\infty e^{-(u + \frac{\sqrt{a}}{u})^2 + 2\sqrt{a}} d\left(u + \frac{\sqrt{a}}{u}\right) = 0, \quad (\text{积分的上下限均为 } \infty) \end{aligned}$$

于是我们得到微分方程 $G(a) + \sqrt{a}G'(a) = 0$, 求解之后得到

$$G(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\sqrt{a}}, \quad a \geq 0.$$

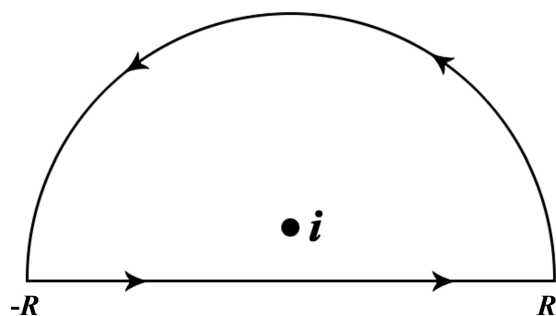
因此 $F(\xi) = 2\sqrt{\pi}G(\frac{\xi^2}{4}) = \pi e^{-|\xi|}$.

(2) 容易看出 $F(\xi)$ 是偶函数, 于是不妨假设 $\xi \leq 0$. 下面定义 γ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上半径为 R 的上半圆的边界, 其中 γ_1, γ_2 分别是半圆弧和直径的部分:

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad \gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im}(z) \geq 0\},$$

$$\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0, -R \leq \operatorname{Re}(z) \leq R\},$$

且 γ_1, γ_2 的定向均为逆时针.



根据留数定理,

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2 + 1} e^{-iz\xi} dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2 + 1} e^{-iz\xi} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2 + 1} e^{-iz\xi}, i\right) = \pi e^\xi. \quad (1)$$

另一方面, γ_1 和 γ_2 上的积分可估计为

$$\left| \int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2+1} e^{-iz\xi} dz \right| \leq \int_{\gamma_1} \frac{1}{R^2-1} e^{\operatorname{Im}(z)\xi} d|z| \leq \frac{\pi R}{R^2-1},$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2+1} e^{-iz\xi} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{x^2+1} e^{-ix\xi} dx.$$

因此在 (1) 中令 $R \rightarrow \infty$ 可以得到

$$F(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1} e^{-ix\xi} = \pi e^{\xi}, \quad \xi \leq 0.$$

由于 $F(\xi)$ 是偶函数, 在一般条件下 $F(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$.

最后, 对 $F(\xi)$ 取导数即可得到 $x(x^2+1)^{-1}$ 的 Fourier 变换:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2+1} e^{-ix\xi} dx = i \frac{d}{d\xi} F(\xi) = \boxed{-i\pi \operatorname{sgn}(\xi) e^{-|\xi|}}$$

其中 $\operatorname{sgn}(\xi)$ 表示 ξ 的符号. ■

2. (10 pts) Compute the Fourier series

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}$$

of the characteristic function f of $[-1, 1]$, that is,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{if } 1 < |x| \leq \pi. \end{cases}$$

Find all points $x \in [-\pi, \pi]$ for which this series converges absolutely.

分析 这是一个常规的 Fourier 级数计算的问题. 它的难度看上去远不值 10 分.

解 直接计算即可得到, 对任意 $n \in \mathbb{Z}$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{inx} dx = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & n = 0, \\ \frac{\sin n}{\pi n}, & n \neq 0. \end{cases}$$

因此 $f(x)$ 的 Fourier 级数形如

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{\sin n}{n} e^{inx} = \boxed{\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos nx}{n}}.$$

下面我们验证该级数在任意 x 处都不绝对收敛, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n \cos nx|}{n} = +\infty \quad (1)$$

对任意 $x \in [-\pi, \pi]$ 成立. 事实上, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n \cos nx|}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n \cos^2 nx}{n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos 2n)(1 + \cos 2nx)}{n},$$

并且由 Dirichlet 判别准则,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n} \text{ 收敛}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n} \text{ 收敛}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n \cos 2nx}{n} \text{ 收敛}.$$

因此, 一定有 (1) 成立, 即 Fourier 级数在任意 $x \in [-\pi, \pi]$ 处均不绝对收敛. ■

3. (10 pts) For all $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, we define $u(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ as follows

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(t\xi^3 + x\xi)} \hat{u}_0(\xi) d\xi.$$

Show that for all $x_0 \in \mathbb{R}$, the function $t \rightarrow \partial_x u(t, x_0)$ belongs to $L^2(\mathbb{R})$ and there exists a constant $c_0 > 0$ independent of x_0 and u , such that

$$\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t, x_0)|^2 dt = c_0 \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 dx.$$

分析 我不知道这么逆天的题目是怎么放到第 3 题的位置的, 这题的难度放到实变函数的最后一题都不过分. 要是我出题, 我会把题目出成这个样子:

(1) (5 pts) For any $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, use Fourier transform to solve the linearized KdV equation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Show $u(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

(2) (5 pts) Show that there exists a constant $c_0 > 0$ independent of x_0 and u , such that

$$\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t, x_0)|^2 dt = c_0 \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 dx.$$

正如我在前述题干条件中提到的, 这个方程的背景是**线性化的 KdV (Korteweg-de Vries¹) 方程**, 它可用来描述浅水波中的孤立波现象. 当方程的初始值是 Dirac 函数 $\delta(x)$ 时, 方程有一个半显式的解²:

$$u(t, x) = \frac{1}{(3t)^{\frac{1}{3}}} \text{Ai} \left(\frac{x}{(3t)^{\frac{1}{3}}} \right),$$

其中 $\text{Ai}(x)$ 是 Airy 函数, 其定义为

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \left(\frac{t^3}{3} + xt \right) dt,$$

它满足微分方程 $\text{Ai}''(x) = x \text{Ai}(x)$. 一般地, 当方程的初始值是 $u_0(x)$ 时, 方程的解为

$$u(t, x) = \frac{1}{(3t)^{\frac{1}{3}}} \int_{\mathbb{R}} \text{Ai} \left(\frac{x-y}{(3t)^{\frac{1}{3}}} \right) u_0(y) dy.$$

不过, 上述表达式很难应用到解题当中. 原题的具体求解仍需使用 $u(t, x)$ 的 Fourier 形式.

解 由 $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 可知 $\hat{u}_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. 根据 $u(t, x)$ 的定义, 有

$$u(t, x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \xi^{-\frac{2}{3}} e^{i(t\xi + x\xi^{\frac{1}{3}})} \hat{u}_0(\xi^{\frac{1}{3}}) d\xi.$$

对 x 取导数后可得

$$\partial_x u(t, x) = \frac{i}{3\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \xi^{-\frac{1}{3}} e^{i(tx + x\xi^{\frac{1}{3}})} \hat{u}_0(\xi^{\frac{1}{3}}) d\xi. \quad (1)$$

由于 $-\frac{1}{3} > -1$ 且 $\hat{u}_0(\xi^{\frac{1}{3}})$ 是速降函数, 上述积分在 $\mathbb{R}$ 上绝对收敛. 因此由 (1) 有

$$|\partial_x u(t, x)|^2 = \frac{1}{18\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \xi^{-\frac{1}{3}} \eta^{-\frac{1}{3}} e^{it(\xi-\eta)} e^{ix(\xi^{\frac{1}{3}}-\eta^{\frac{1}{3}})} \hat{u}_0(\xi^{\frac{1}{3}}) \overline{\hat{u}_0(\eta^{\frac{1}{3}})} d\xi d\eta.$$

对任意正数 $a > 0$, 在上式两边同乘 $e^{-\frac{t^2}{2a}}$ 并积分, 可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t, x)|^2 e^{-\frac{t^2}{2a}} dt &= \frac{1}{18\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \xi^{-\frac{1}{3}} \eta^{-\frac{1}{3}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{it(\xi-\eta)-\frac{t^2}{2a}} dt \right) e^{ix(\xi^{\frac{1}{3}}-\eta^{\frac{1}{3}})} \hat{u}_0(\xi^{\frac{1}{3}}) \overline{\hat{u}_0(\eta^{\frac{1}{3}})} d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{18} \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \iint_{\mathbb{R}^2} \xi^{-\frac{1}{3}} \eta^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{a}{2}(\xi-\eta)^2} e^{ix(\xi^{\frac{1}{3}}-\eta^{\frac{1}{3}})} \hat{u}_0(\xi^{\frac{1}{3}}) \overline{\hat{u}_0(\eta^{\frac{1}{3}})} d\xi d\eta. \quad (2) \end{aligned}$$

¹de Vries 是一个姓氏. 类似的, Kevin de Bruyne 的姓氏是 de Bruyne.

²可以参考论文: Shigeo Tarama. “Analyticity of solutions of the Korteweg-de Vries equation.” J. Math. Kyoto Univ. 44 (1) 1–32, 2004.

在 (2) 中, 我们期待当 $a \rightarrow \infty$ 时, 左边收敛到 $\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t, x)|^2 dt$, 而右边会因为 $\sqrt{\frac{a}{2\pi}} e^{-\frac{a}{2}(\xi-\eta)^2}$ 变成 Dirac 函数而变成一个一维积分. 这个过程是需要严格化的, 为此我们需要下面的引理:

引理 对任何实数 $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$, 有

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{a} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{|\xi^{-\frac{1}{3}} - \eta^{-\frac{1}{3}}|}{|\xi|^\beta (1 + \xi^2)} e^{-\frac{a}{2}(\xi-\eta)^2} d\xi d\eta = 0. \quad (3)$$

固定 ξ , 将对 η 的积分分为两段: $|\eta| \geq \frac{1}{2}|\xi|$ 和 $|\eta| \leq \frac{1}{2}|\xi|$.

- 当 $|\eta| \geq \frac{1}{2}|\xi|$ 时, 利用不等式

$$\begin{aligned} \frac{|\xi^{-\frac{1}{3}} - \eta^{-\frac{1}{3}}|}{|\xi|^\beta} &= \frac{|\eta^{\frac{1}{3}} - \xi^{\frac{1}{3}}|}{|\xi|^{\frac{1}{3}+\beta} |\eta|^{\frac{1}{3}}} = \frac{|\eta - \xi|}{|\xi|^{\frac{1}{3}+\beta} |\eta|^{\frac{1}{3}} (\xi^{\frac{2}{3}} + \xi^{\frac{1}{3}} \eta^{\frac{1}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}})} \\ &\leq \frac{|\eta - \xi|}{|\xi|^{\frac{1}{3}+\beta}} \frac{2}{|\eta - \xi|^{\frac{1}{3}}} \frac{3}{|\xi|^{\frac{1}{6}} |\eta - \xi|^{\frac{1}{2}}} = \frac{6|\eta - \xi|^{\frac{1}{6}}}{|\xi|^{\frac{1}{2}+\beta}}, \end{aligned}$$

可以得到

$$\begin{aligned} I_1(a) &= \sqrt{a} \iint_{|\eta| \geq \frac{1}{2}|\xi|} \frac{|\xi^{-\frac{1}{3}} - \eta^{-\frac{1}{3}}|}{|\xi|^\beta (1 + \xi^2)} e^{-\frac{a}{2}(\xi-\eta)^2} d\xi d\eta \\ &\leq 6\sqrt{a} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{|\eta - \xi|^{\frac{1}{6}}}{|\xi|^{\frac{1}{2}+\beta} (1 + \xi^2)} e^{-\frac{a}{2}(\xi-\eta)^2} d\xi d\eta \\ &= 6\sqrt{a} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\xi|^{\frac{1}{2}+\beta} (1 + \xi^2)} d\xi \int_{\mathbb{R}} |u|^{\frac{1}{6}} e^{-\frac{a}{2}u^2} du \quad (\text{换元 } u = \eta - \xi) \\ &\leq \frac{6}{a^{\frac{1}{12}}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\xi|^{\frac{1}{2}+\beta} (1 + \xi^2)} d\xi \int_{\mathbb{R}} |v|^{\frac{1}{6}} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \quad (\text{换元 } v = \sqrt{a}u) \\ &\leq \frac{C_\beta}{a^{\frac{1}{12}}}, \end{aligned}$$

其中 C_β 是仅依赖于 β 的常数.

- 当 $|\eta| \leq \frac{1}{2}|\xi|$ 时, 利用不等式

$$|\xi^{-\frac{1}{3}} - \eta^{-\frac{1}{3}}| \leq 2|\eta|^{-\frac{1}{3}}, \quad e^{-\frac{a}{2}(\xi-\eta)^2} \leq e^{-\frac{a}{8}\xi^2},$$

可以得到

$$\begin{aligned}
I_2(a) &= \sqrt{a} \iint_{|\eta| \leq \frac{1}{2}|\xi|} \frac{|\xi^{-\frac{1}{3}} - \eta^{-\frac{1}{3}}|}{|\xi|^\beta(1+\xi^2)} e^{-\frac{a}{2}(\xi-\eta)^2} d\xi d\eta \\
&\leq 2\sqrt{a} \iint_{|\eta| \leq \frac{1}{2}|\xi|} \frac{1}{|\eta|^{\frac{1}{3}}|\xi|^\beta(1+\xi^2)} e^{-\frac{a}{8}\xi^2} d\xi d\eta \\
&\leq 2\sqrt{a} \int_{\mathbb{R}} \frac{2|\xi|^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \frac{1}{|\xi|^\beta} e^{-\frac{a}{8}\xi^2} d\xi \\
&= 6\sqrt{a} \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{\frac{2}{3}-\beta} e^{-\frac{a}{8}\xi^2} d\xi \\
&= \frac{6}{a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\beta}} \int_{\mathbb{R}} |u|^{\frac{2}{3}-\beta} e^{-\frac{1}{8}u^2} du \quad (\text{换元 } u = \sqrt{a}\xi) \\
&\leq \frac{C_\beta}{a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\beta}},
\end{aligned}$$

其中 C_β 是仅依赖于 β 的常数.

综合 $I_1(a)$ 和 $I_2(a)$ 的估计可以得到

$$\sqrt{a} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{|\xi^{-\frac{1}{3}} - \eta^{-\frac{1}{3}}|}{|\xi|^\beta(1+\xi^2)} e^{-\frac{a}{2}(\xi-\eta)^2} d\xi d\eta \leq C_\beta \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{12}}} + \frac{1}{a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\beta}} \right).$$

从而引理得证.

回到等式 (2). 注意到

$$|e^{ix(\xi^{\frac{1}{3}} - \eta^{\frac{1}{3}})} - 1| \leq |x| |\xi^{\frac{1}{3}} - \eta^{\frac{1}{3}}|,$$

因此在 (3) 中取 $\beta = 0$ 可得到

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{a} \iint_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{-\frac{1}{3}} |\eta|^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{a}{2}(\xi-\eta)^2} |e^{ix(\xi^{\frac{1}{3}} - \eta^{\frac{1}{3}})} - 1| |\hat{u}_0(\xi^{\frac{1}{3}}) \overline{\hat{u}_0(\eta^{\frac{1}{3}})}| d\xi d\eta = 0.$$

因此由 (2) 可得到估计: 固定 $x \in \mathbb{R}$, 当 $a \rightarrow \infty$ 时,

$$\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t, x)|^2 e^{-\frac{t^2}{2a}} dt = \frac{1}{18} \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \iint_{\mathbb{R}^2} \xi^{-\frac{1}{3}} \eta^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{a}{2}(\xi-\eta)^2} \hat{u}_0(\xi^{\frac{1}{3}}) \overline{\hat{u}_0(\eta^{\frac{1}{3}})} d\xi d\eta + o(1). \quad (4)$$

继续使用类似的技巧, 注意到

$$|\hat{u}_0(\eta^{\frac{1}{3}}) - \hat{u}_0(\xi^{\frac{1}{3}})| \leq C |\eta^{\frac{1}{3}} - \xi^{\frac{1}{3}}|,$$

在 (3) 中取 $\beta = 0$, 由 (4) 可以得到

$$\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t, x)|^2 e^{-\frac{t^2}{2a}} dt = \frac{1}{18} \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \iint_{\mathbb{R}^2} \xi^{-\frac{1}{3}} \eta^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{a}{2}(\xi-\eta)^2} |\hat{u}_0(\xi^{\frac{1}{3}})|^2 d\xi d\eta + o(1). \quad (5)$$

最后, 在 (3) 中取 $\beta = \frac{1}{3}$, 由 (5) 可以得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t, x)|^2 e^{-\frac{t^2}{2a}} dt &= \frac{1}{18} \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \iint_{\mathbb{R}^2} \xi^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{a}{2}(\xi-\eta)^2} |\hat{u}_0(\xi^{\frac{1}{3}})|^2 d\xi d\eta + o(1) \\ &= \frac{1}{9} \int_{\mathbb{R}} \xi^{-\frac{2}{3}} |\hat{u}_0(\xi^{\frac{1}{3}})|^2 d\xi + o(1) \\ &= \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi + o(1) \quad (\text{换元 } \xi \rightarrow \xi^3) \\ &= \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 dx + o(1), \quad (\text{Parseval 等式}) \end{aligned}$$

因此可得到

$$\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t, x)|^2 e^{-\frac{t^2}{2a}} dt = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 dx + o(1). \quad (6)$$

在两边令 $a \rightarrow \infty$, 并由单调收敛定理得到

$$\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t, x)|^2 dt = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 dx.$$

因此常数 $c_0 = \frac{1}{3}$. ■

4. (10 pts) Let $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ be non-constant and holomorphic, where Ω is an open bounded set containing the closed unit disk $|z| \leq 1$. Assume $|f(w)| = 1$ whenever $|w| = 1$, show that $f(\Omega)$ contains the open unit disk.

分析 这是一个中规中矩的复分析题目. 主要利用的性质是最大模原理, 即全纯函数在有界连通闭区域的最大模一定在边界上取到.

解 记单位圆盘 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, 其闭包为 $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, 边界为 $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. 由于 $f(z)$ 是 D 上的全纯函数且连续到边界 ∂D , 因此 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上的最大模在 ∂D 上取到, 从而

$$|f(z)| \leq 1, \quad \forall z \in D. \quad (1)$$

下面证明 $f(z)$ 在 D 内有零点. 否则, $\frac{1}{f(z)}$ 是 D 上的全纯函数且连续到边界, 由最大模原理

$$|f(z)| \geq 1, \quad \forall z \in D. \quad (2)$$

由(1)(2)可得 $|f(z)| = 1$ 在 D 上恒成立, 从而 $f(z)$ 在 D 上恒为常数, 导致矛盾.

下面证明: 若实数 $r \in [0, 1)$ 使得对任意 $|w| \leq r$, 方程 $f(z) = w$ 在 D 内有解, 则对任意 $|w| \leq \frac{1}{2-r+(1-r)^2}$, 方程 $f(z) = w$ 在 D 内有解.

使用反证法. 假设对某个 $|w_0| \leq \frac{1}{2-r+(1-r)^2}$, 方程 $f(z) = w_0$ 在 D 内没有解, 则函数

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

是 D 上的全纯函数且连续到边界, 因此其最大模在边界上某点 $z_0 \in \partial D$ 取到. 因此

$$|f(z_0) - w_0| \leq |f(z) - w_0|, \quad \forall z \in D. \quad (3)$$

根据条件, 方程 $f(z) = rw_0$ 一定在 D 内有解, 因此存在 $z_1 \in D$ 使得 $f(z_1) = rw_0$. 在 (3) 中取 $z = z_1$, 可得

$$|f(z_0) - w_0| \leq (1-r)|w_0| \implies 1 = |f(z_0)| \leq (2-r)|w_0|,$$

于是我们得到不等式 $|w_0| \geq \frac{1}{2-r} > \frac{1}{2-r+(1-r)^2}$, 导致矛盾.

定义数列 $\{r_n\}_{n=0}^\infty$ 如下:

$$r_n = 0, \quad r_{n+1} = \frac{1}{2-r_n+(1-r_n)^2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

则根据数学归纳法, 对任意 $n \geq 0$ 和 $|w| \leq r_n$, 方程 $f(z) = w$ 在 D 内有解.

最后, 来证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$. 令 $a_n = 1 - r_n$, 则 a_n 满足

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n(1+a_n)}{1+a_n+a_n^2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

于是 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ 为正的单调递减数列, 且极限为 0. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$.

由于 r_n 可以取到任意接近 1 的值, 可得到: 对任意 $|w| < 1$, 方程 $f(z) = w$ 在 D 内有解. ■

5. (15 pts) Consider the following second order linear equation for real-valued $u = u(x)$:

$$x \frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \frac{du}{dx} + u = 0.$$

(i) Prove that all nontrivial solutions have infinite number of zeroes on $(1, +\infty)$.

(ii) Is it true that all nontrivial solutions must have finite number of zeroes on $(0, 1)$?

(iii*) Is it true that there exists a nontrivial solution $u \in C^2[0, +\infty)$?

分析 这是一个和微分方程的解的零点数量有关的问题. 对于 (i), 只需证明 $u(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 不可能恒正, 于是可以考察其对数函数 $v(x) = \log u(x)$. 对于 (ii), 麻烦的点在于方程在 $x = 0$ 处的系数会变得无穷大, 导致其在 $x = 0$ 难以分析. 此时需要对方程的时间尺度做适当的变换, 并综合使用稳定性分析的一些技巧. (iii) 是我自己加的一道题.

解 注意到, 若取 $v = u'$, 则原微分方程可以改写为关于 u, v 的一阶线性微分方程:

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -\frac{1}{x}(2v + u), \end{cases}$$

因此在任意 $x_0 \in (0, +\infty)$ 处给定 $u(x_0)$ 和 $v(x_0) = u'(x_0)$, 方程的解可以连续延拓到 $(0, +\infty)$.

(i) 只需证明: 对方程的任意非零解 $u(x)$ 和任意 $A \geq 2$, $u(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 上至少有一个零点. 否则, 有 $u(x) \neq 0$ 在 $[A, +\infty)$ 上恒成立. 于是可定义 $[A, +\infty)$ 上的实值函数

$$w(x) = \frac{u'(x)}{u(x)},$$

于是有 $w' = \frac{u''u - (u')^2}{u^2}$, 从而 $w(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 上满足微分方程

$$w'(x) = -\frac{2w(x) + 1}{x} - w^2(x). \quad (1)$$

下面分两种情形讨论.

- 若 $w(x) \geq -\frac{1}{2}$ 在 $[A, +\infty)$ 上恒成立, 则由 $w'(x) \leq -w^2(x) \leq 0$ 可知 $w(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 单调递减. 令 $w_* = \lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) \in \mathbb{R}$. 则根据方程 (1) 有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} w'(x) = -w_*^2.$$

但由于 $w(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时收敛, 必须有 $w_* = 0$. 从而存在 $A_1 \geq A$, 使得在 $x \geq A_1$ 时恒有 $w(x) \geq -\frac{1}{4}$. 当 $x \geq A_1$ 时, 有不等式

$$\begin{aligned} w(A_1) - w(x) &= -\int_{A_1}^x w'(y) dy = \int_{A_1}^x \left(\frac{2w(y) + 1}{y} + w^2(y) \right) dy \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{A_1}^x \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \log \frac{x}{A_1}. \end{aligned}$$

令 $x \rightarrow \infty$, 则左端收敛而右端发散到 $+\infty$, 导致矛盾.

- 于是可令 $x_0 \in [A, +\infty)$ 满足 $w(x_0) \leq -\frac{1}{2}$. 下面证明:

$$\text{若 } x \geq 2 \text{ 满足 } w(x) \leq -\frac{1}{2}, \text{ 则有 } w'(x) \leq -\frac{1}{2}w^2(x). \quad (2)$$

事实上, 由方程 (1) 可以得到

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{-2w(x) - 1}{x} - w^2(x) \leq \frac{-2w(x) - 1}{2} - w^2(x) \\ &= -\frac{1}{2}(w(x) + 1)^2 - \frac{1}{2}w^2(x) \leq -\frac{1}{2}w^2(x). \end{aligned}$$

由 (2) 可以推出 $w(x) \leq -\frac{1}{2}$ 在 $[x_0, +\infty)$ 上恒成立. 否则, 令

$$x_1 = \inf \left\{ x \geq x_0 : w(x) > -\frac{1}{2} \right\}, \quad (3)$$

则由 $w(x)$ 的连续性可得 $w(x_1) = -\frac{1}{2}$, 于是由 (2) 可得 $w'(x_1) \leq -\frac{1}{2}w^2(x_1) = -\frac{1}{8}$. 因此, 存在 $\delta > 0$ 使得 $w(x) \leq -\frac{1}{2}$ 对任意 $x \in [x_1, x_1 + \delta]$ 都成立, 这与 (3) 矛盾.

于是 $w(x) \leq -\frac{1}{2}$ 和 $w'(x) \leq -\frac{1}{2}w^2(x)$ 在 $[x_0, +\infty)$ 上恒成立, 因此有

$$\frac{1}{w(x)} - \frac{1}{w(x_0)} \geq \frac{x - x_0}{2}$$

对 $x \in [x_0, +\infty)$ 恒成立. 但当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 左端有界而右端发散到 $+\infty$, 导致矛盾.

综合以上可知, $w(x)$ 不可能在 $[A, +\infty)$ 上一直存在, 因此 $u(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 一定有零点.

(ii) 正确. 事实上, 所有非零解均在 $(0, 1]$ 上至多只有一个解. 为证明该结论, 首先需要对方程做一些变换. 取 $v = u'$, 并考察关于 u, v 的线性微分方程:

$$\begin{cases} u'(x) = v(x), \\ v'(x) = -\frac{1}{x}(2v(x) + u(x)), \end{cases}$$

做时间变量的变换 $t = -\log x$, 则 $t \in [0, +\infty)$ 且 $x = e^{-t}$, 于是

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t} \implies \begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} = -e^{-t}v(t), \\ \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = 2v(t) - u(t). \end{cases}$$

因此, 最终我们只需证明如下结论: 若 $u(t)$ 和 $v(t)$ 在 $t \in [0, +\infty)$ 上满足线性微分方程

$$\begin{cases} u'(t) = -e^{-t}v(t), \\ v'(t) = 2v(t) + u(t), \end{cases} \quad (4)$$

且 $u(t)$ 和 $v(t)$ 不全为零函数, 则 $u(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上至多只有一个零点.

如果 $u(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上已经没有零点, 则 (4) 立即成立. 否则, 设 $t_0 \geq 0$ 是 $u(t)$ 最小的零点. 当 $t \geq t_0$ 时, $u(t)$ 可以写为

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(s)ds = - \int_{t_0}^t e^{-s}v(s)ds,$$

从而当 $t \geq t_0$ 时, $v(t)$ 满足方程

$$v'(t) = 2v(t) - \int_{t_0}^t e^{-s}v(s)ds. \quad (5)$$

不妨设 $v(t_0) > 0$, 则 $v'(t_0) = 2v(t_0) > 0$. 下面我们证明: 对一切 $t \in [t_0, +\infty)$ 都有 $v'(t) \geq 0$. 若不成立, 则可定义

$$t_1 = \inf \{t_1 \geq t_0 : v'(t) < 0\},$$

则由 $v'(t)$ 的连续性有 $v'(t_1) = 0$, 且因为 t_1 的最小性, 对 $t \in [t_0, t_1]$ 总有 $v'(t) \geq 0$. 从而 $v(t)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上单调递增. 但是, 根据等式 (5) 有

$$2v(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{-s}v(s)ds \leq \int_{t_0}^{t_1} e^{-s}v(t_1)ds = (e^{-t_0} - e^{-t_1})v(t_1),$$

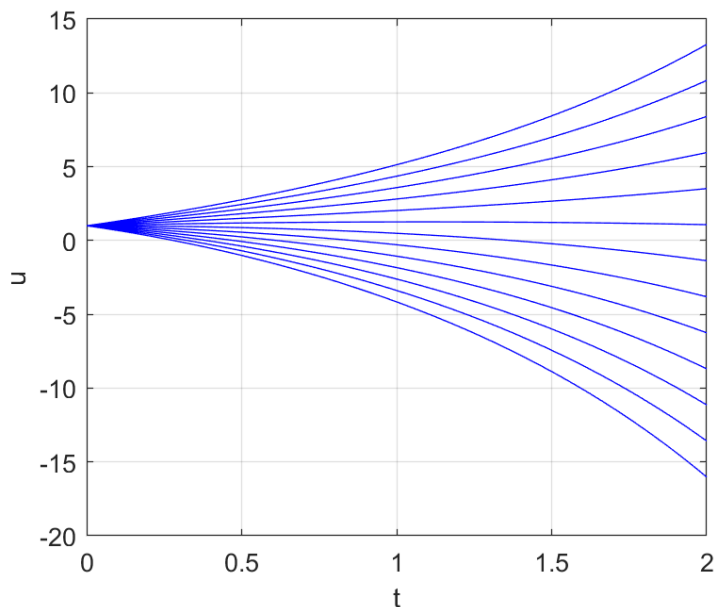
从而有 $v(t_1) \leq 0$, 这与 $v(t_1) \geq v(t_0) > 0$ 相矛盾.

因此必然对一切 $t \in [t_0, \infty)$ 都有 $v'(t) \geq 0$, 从而 $v(t) > 0$ 对 $t \in [t_0, \infty)$ 恒成立. 由于

$$u'(t) = -e^{-t}v(t) < 0, \quad \forall t \geq t_0,$$

因此 $u(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上严格单调递减. 但 $u(t_0) = 0$, 所以 $u(t)$ 在 $(t_0, +\infty)$ 上再无其它零点.

下图绘制了方程 (4) 在 $u(0) = 1$ 和不同的 $v(0)$ 时的部分图像. 可以看到所有解均与 x 轴有至多一个交点.



(iii) 存在. 为了构造该方程的解, 只需在 $x = 0$ 附近求解微分方程

$$w'(x) = -\frac{2w(x) + 1}{x} - w^2(x). \quad (1)$$

假设 $w(x)$ 可以在 0 处展开成幂级数, 即

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

且其中 $a_0 = -\frac{1}{2}$. 将幂级数的表达式代入 (1), 可以得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)a_{n+1}x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^2.$$

比较两端 x^n 的系数, 可以得到 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的递推公式:

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+3} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}.$$

而另一方面, Catalan 数 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足 $b_0 = 1$, 且递推公式为

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n b_k b_{n-k}.$$

因此由数学归纳法, 有 $|a_n| \leq b_n$ 恒成立. 注意到 Catalan 数的生成函数是

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

我们得到 $w(x)$ 的不等式估计:

$$|w(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x},$$

从而 $w(x)$ 在 $[0, \frac{1}{8}]$ 上光滑, 且可以由系数 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 唯一确定.

进一步, 由 $w(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ 可知 $u(x)$ 在 $[0, \frac{1}{8}]$ 上的表达式为

$$u(x) = \exp \left(\int_0^x w(y) dy \right), \quad x \in \left[0, \frac{1}{8}\right].$$

将上式给出的 $u(x)$ 延拓到 $[\frac{1}{8}, +\infty)$ 即得到原方程的解. ■

6. (15 pts) Let $p \in [1, \infty)$ and $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a sequence of functions in $L^p(\mathbb{R})$ such that $f_n \rightarrow f$ a.e. and $f \in L^p(\mathbb{R})$.

(i) If $p \in (1, \infty)$, prove that if $\sup_n \|f_n\|_{L^p} < \infty$, then f_n converges to f weakly, i.e., for any $g \in L^q(\mathbb{R})$ with $q = \frac{p}{p-1}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n g dx = \int_{\mathbb{R}} f g dx.$$

(ii) Show that the result in (i) does not hold when $p = 1, q = \infty$.

分析 本题是中等难度的实变函数题, (i) 的证明可以先从 g 是简单函数的情形入手, 利用 Egorov 定理即可完成证明. (ii) 的反例构造是常见的.

解 (i) 不妨设 $f = 0$. 先证明如下引理:

引理 若 $E \subset \mathbb{R}$ 是有限测度集, E 上的函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

$$\sup_n \|f_n\|_{L^p(E)} < +\infty, \quad f_n \rightarrow 0 \text{ a.e. in } E,$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dx = 0.$$

根据 Egorov 定理, 对任意 $\delta > 0$, 存在可测集 $E_\delta \subset E$ 使得 $m(E_\delta) < \delta$, 且 f_n 在 $E \setminus E_\delta$ 上一致收敛到 0. 因此, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq N$ 时,

$$|f_n(x)| \leq \delta, \quad x \in E \setminus E_\delta.$$

由于 f_n 在 E 上的积分可写为

$$\int_E f_n dx = \int_{E_\delta} f_n dx + \int_{E \setminus E_\delta} f_n dx,$$

于是当 $n \geq N$ 时, 根据 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned} \int_E |f_n| dx &\leq \int_{E_\delta} |f_n| dx + \int_{E \setminus E_\delta} |f_n| dx \\ &\leq \int_E \chi_{E_\delta}(x) |f_n(x)| dx + \int_{E \setminus E_\delta} \delta dx \\ &\leq \left(\int_E \chi_{E_\delta}(x) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_E |f_n(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + m(E) \delta \\ &\leq C \delta^{\frac{1}{q}} + m(E) \delta. \end{aligned}$$

由于 δ 可以取到任意小的值, 引理得证.

根据引理可知, 在原题的条件下, 对任何简单函数 g , 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n g dx = 0.$$

一般的, 如果 $g \in L^q(\mathbb{R})$, 则可以取一系列紧支的简单函数 $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$, 使得

$$\sup_m \|g_m\|_{L^q} < +\infty, \quad g_m \rightarrow g \text{ in } L^q(\mathbb{R}).$$

于是有不等式估计

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} f_n g dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f_n| |g - g_m| dx + \left| \int_{\mathbb{R}} f_n g_m dx \right| \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g - g_m|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} + \left| \int_{\mathbb{R}} f_n g_m dx \right|. \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由于 $\int_{\mathbb{R}} f_n g_m dx$ 收敛到 0, 因此

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}} f_n g dx \right| \leq C \left(\int_{\mathbb{R}} |g - g_m|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

再令 $m \rightarrow \infty$ 即知 $\int_{\mathbb{R}} f_n g dx$ 收敛到 0.

(ii) 取 $f_n(x) = \frac{1}{1 + (x - n)^2}$, 则 $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx$ 为定值, 且 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处收敛到 0. 但是, 若取 $g(x) = 1 \in L^\infty(\mathbb{R})$, 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + x^2} dx > 0.$$

因此在 $p = 1, q = \infty$ 时结论不成立. ■

7. (15 pts) Assume that $n \geq 2, p \in (1, 2)$, and $q \in [p, +\infty]$.

(i) Show that there exists a constant C (may depend on p, q, n) such that for all radial function $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \bar{B})$, there holds

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Here $\bar{B}$ is the closed unit ball in $\mathbb{R}^n$.

(ii) Show that F has a compact closure in X . Here X is the closure of $\{f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}) : f \text{ is radial}\}$ under $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ -norm and

$$F = \{f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}) : f \text{ is radial and } \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq 1\}.$$

分析 在本题中, f 是径向函数这一条件要充分利用. (i) 的形式类似于 Sobolev 嵌入不等式, 利用径向函数的特性可以将其转化为一维积分的不等式. (ii) 的核心是广义 Arzela–Ascoli 定理, 利用 F 中函数的等度连续和一致有界来证明 F 是相对紧的.

解 (i) 当 $f(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \bar{B})$ 径向函数时, 令 $f(x) = g(|x|)$, 其中 $g \in C_c^\infty((1, +\infty))$. 此时有

$$\nabla f(x) = g'(|x|) \frac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{B},$$

因此

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(|x|)|^p dx = \omega_n \int_1^\infty r^{n-1} |g(r)|^p dr, \\ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |g'(|x|)|^p dx = \omega_n \int_1^\infty r^{n-1} |g'(r)|^p dr, \end{aligned}$$

其中 $\omega_n > 0$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体的表面积. 因此只需证明下面的不等式:

$$\sup_{r \in (1, +\infty)} |g(r)| \leq C \left(\int_1^\infty r^{n-1} (|g(r)|^p + |g'(r)|^p) dr \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1)$$

$$\left(\int_1^\infty r^{n-1} |g(r)|^q dr \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_1^\infty r^{n-1} (|g(r)|^p + |g'(r)|^p) dr \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2)$$

对某个不依赖于 g 的常数 C 成立. 下面不妨设

$$\int_1^\infty r^{n-1} (|g(r)|^p + |g'(r)|^p) dr = 1,$$

则只需证明 (1) 和 (2) 的左端有界. 对于 (1), 任取 $r_1 > r > 1$ 有

$$g(r_1) - g(r) = \int_r^{r_1} g'(s) ds.$$

因此, 根据 Hölder 不等式可以得到

$$\begin{aligned} |g(r_1) - g(r)| &\leq \int_r^{r_1} |g'(s)| ds \\ &\leq \left(\int_r^{r_1} s^{n-1} |g'(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_r^{r_1} s^{-\frac{n-1}{p-1}} ds \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq C \left(r^{\frac{p-n}{p-1}} - r_1^{\frac{p-n}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned} \quad (3)$$

注意, 当 $n \geq 2$ 时, 这里的指数

$$\frac{p-n}{p-1} \leq \frac{p-2}{p-1} < 0.$$

因此可令 $r_1 \rightarrow \infty$, 从而得到

$$|g(r)| \leq C r^{\frac{p-n}{p}}, \quad r \geq 1.$$

特别的, $g(r) \leq C$ 对任何 $r > 1$ 成立, 从而 (1) 得证.

为证明 (2), 只需注意当 $q \geq p$ 时, 由 $g(r)$ 的有界性可以得到

$$\int_1^\infty r^{n-1} |g(r)|^q dr \leq C \int_1^\infty r^{n-1} |g(r)|^p dr = C.$$

因此 (1)(2) 均成立, 不等式 (i) 得证.

(ii) 首先来确定集合 X 的范围.

引理 1 定义集合 X 是 $(1, +\infty)$ 上连续且端点处收敛到 0 的函数族, 即

$$X = \left\{ g \in C((1, +\infty)) : \lim_{r \rightarrow 1} g(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = 0 \right\},$$

则 X 是 $C_c^\infty((1, +\infty))$ 在 $L^\infty((1, +\infty))$ 意义下的闭包.

容易看出 X 是闭集, 且 $C_c^\infty((1, +\infty)) \subset X$, 故 $\overline{C_c^\infty((1, +\infty))} \subset X$. 下面证明 $X \subset \overline{C_c^\infty((1, +\infty))}$, 即 X 中的任意函数都可以被 $(1, +\infty)$ 上的光滑紧支函数一致逼近. 只需证明一个稍弱的结论: X 中的任意函数可以被 $(1, +\infty)$ 上的连续紧支函数一致逼近. 这是因为, 任何 $(1, +\infty)$ 上的连续紧支函数 $g(r)$ 可以被其 Gauss 卷积

$$g_\delta(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(r-s)^2}{2\delta^2}} g(s) ds$$

一致逼近, 并且当 δ 充分小时, $g_\delta(r)$ 的支集包含在 $(1, +\infty)$ 中.

当 $g(r) \in X$ 时, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 1$ 和 $R > \delta$ 使得

$$|g(r)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{对任意 } r \in (1, \delta] \cup [R, +\infty).$$

下面取函数 $g_\delta(r)$

$$g_\delta(r) = \begin{cases} \frac{2g(\delta)}{\delta} \left(r - \frac{\delta}{2} \right), & \text{若 } \frac{\delta}{2} \leq r \leq \delta, \\ g(r), & \text{若 } \delta < r < R, \\ g(R) - g(R)(r - R), & \text{若 } R \leq r \leq R + 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

则容易验证 $|g(r) - g_\delta(r)| \leq \varepsilon$ 在 $r \in (1, +\infty)$ 上恒成立, 且 $g_\delta(r)$ 的支撑集包含在 $(1, +\infty)$.

接下来我们来证明广义 Arzela–Ascoli 定理:

引理 2 设函数族 $F \subset X$ 满足以下条件:

- **一致有界.** 存在 $M > 0$ 使得 $\|g\|_{L^\infty} \leq M$ 对所有 $g \in F$ 成立.
- **一致衰减.** 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 1$ 和 $R > \delta$ 使得

$$|g(r)| < \varepsilon, \quad \text{对所有 } r \in (1, \delta] \cup [R, +\infty) \text{ 成立}$$

- **内闭等度连续.** 对任何 $R > \delta > 1$, F 中的所有函数 g 在 $[\delta, R]$ 上等度连续.

即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $r_1, r_2 \in [\delta, R]$ 且 $|r_1 - r_2| < \delta$ 时, $|g(r_1) - g(r_2)| < \varepsilon$ 对所有 $g \in F$ 成立.

则 F 在 X 中是相对紧的, 即 $\bar{F}$ 是紧集.

要证明广义 Arzela–Ascoli 定理, 只需证明: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 X 中的有限个半径为 ε 的开球覆盖 F . 首先, 根据一致衰减, 可以取 $R > \delta > 1$ 使得

$$|g(r)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{对所有 } r \in (1, \delta] \cup [R, +\infty) \text{ 和 } g \in F \text{ 成立.} \quad (4)$$

接着, F 中的所有函数在 $[\delta, R]$ 上满足一致有界和等度连续的条件, 因此由经典 Arzela–Ascoli 定理, $F|_{[\delta, R]}$ 在 $L^\infty([\delta, R])$ 中是相对紧的. 进而 $F|_{[\delta, R]}$ 可以被 $L^\infty([\delta, R])$ 中有限个半径为 $\frac{\varepsilon}{2}$ 的开球覆盖, 即存在 $L^\infty([\delta, R])$ 中的函数列 $\{g_k\}_{k=1}^K$, 使得对任意 $g \in F$, 都存在 $k \in \{1, \dots, K\}$

$$|g(r) - g_k(r)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{对所有 } \delta \leq r \leq R \text{ 成立.} \quad (5)$$

下面将 $g_k(r)$ 的定义域延拓到 $(1, +\infty)$. 定义

$$\tilde{g}_k(r) = \begin{cases} \frac{g_k(\delta)}{\delta - 1}(r - 1), & \text{若 } 1 < r \leq \delta, \\ g_k(r), & \text{若 } \delta \leq r \leq R, \\ g_k(R) - g_k(R)(r - R), & \text{若 } R \leq r \leq R + 1, \end{cases}$$

则函数列 $\{\tilde{g}_k(r)\}_{k=1}^K$ 包含于 X , 且只要 (4)(5) 成立, 就可以得到

$$|g(r) - \tilde{g}_k(r)| < \varepsilon, \quad \text{对所有 } r \in (1, +\infty) \text{ 成立.}$$

于是, 以 $\{\tilde{g}_k(r)\}_{k=1}^K$ 为中心, ε 为半径的开球可以覆盖 F 中的所有函数 g . 故 F 是相对紧的.

回到原题. (3) 说明了对任意 $R > \delta > 1$, F 中所有函数在 $[\delta, R]$ 上是等度连续的. 另外根据

$$|g(r)| \leq C \min \left\{ \left(1 - r^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}, r^{\frac{p-n}{p}} \right\}, \quad \forall r \in (1, +\infty),$$

可知 F 中的函数在 $r = 1$ 和 $r = +\infty$ 处一致收敛到 0. 因此, 根据广义 Arzela-Ascoli 定理, F 在 X 中是相对紧的. ■

8. (15 pts) Given a domain $\Omega \subset \mathbb{C}$ and a point $p \in \Omega$, define

$$c(p) = \sup\{|f'(p)| : f \in (\Omega, D)_p\},$$

where D is the open unit disk $|z| < 1$ and $(\Omega, D)_p$ is the set of holomorphic maps $f : \Omega \rightarrow D$ with $f(p) = 0$.

(i) Find the value of $c(p)$ when $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\}$.

(ii) Find the value of $c(p)$ when $\Omega = D$.

分析 本题的主要难度在于在 (ii) 中构造一个全纯函数 $f(z)$, 使得 $f(p) = 0$, 并且当 $|z| = 1$ 时总有 $|f(z)| = 1$. 满足该条件的函数是 Blaschke 因子, 即 $f(z) = \frac{z-p}{1-\bar{p}z}$, 且 $f'(p) = \frac{1}{1-p^2}$. 而证明 $|f'(p)| \leq 1$ 只需利用 Cauchy 积分公式即可完成.

解 (i) 根据 Riemann 的可去奇点定理, 由于 $f(z)$ 在 $0, 1, 2$ 处为可去奇点, 因此 $f(z)$ 可以解析延拓到这些点上. 于是 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的有界全纯函数, 根据 Liouville 定理, $f(z)$ 为常数函数. 由于 $f(p) = 0$, 因此 $f(z) \equiv 0$. 于是有 $\boxed{c(p) = 0}$.

(ii) 首先来说明, 当 $|p| < 1$ 时, $|f'(p)|$ 可以取到 $\frac{1}{1-p^2}$. 取

$$f(z) = \frac{z-p}{1-\bar{p}z},$$

则 $f(p) = 0$. 且当 $|z| = 1$ 时, 有

$$|f(z)| = \frac{|z-p|}{|\bar{z}z - \bar{p}z|} = \frac{|z-p|}{|z||\bar{z} - \bar{p}|} = 1.$$

根据最大模原理, 当 $|z| < 1$ 时, 总有 $|f(z)| < 1$, 这意味着 $f \in (D, D)_p$. 此时

$$f'(p) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{f(z)}{z-p} = \frac{1}{1-p^2},$$

所以 $|f'(p)|$ 至少可以取到 $\frac{1}{1-p^2}$.

另一方面, 为了估计 $|f'(p)|$ 的上界, 由旋转对称性可不妨设 $p \in [0, 1)$. 对任意 $f \in (D, D)_p$, 由 Cauchy 积分公式可得, 对任意 $R \in (p, 1)$,

$$f'(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-p)^2} dz.$$

由于 $|f(z)| \leq 1$ 在 $|z| = R$ 上成立, 有

$$|f'(p)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=R} \frac{1}{|z-p|^2} |dz| = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|Re^{i\theta} - p|^2} d\theta.$$

令 $R \rightarrow 1$, 即可得到

$$|f'(p)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|e^{i\theta} - p|^2} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + p^2 - 2p \cos \theta} d\theta. \quad (1)$$

注意到积分公式: 当 $a > |b|$ 时,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b \cos \theta} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

因此由 (1) 可以得到

$$|f'(p)| \leq \frac{1}{1-p^2},$$

故命题得证, 即 $c(p) = \frac{1}{1-p^2}$. ■