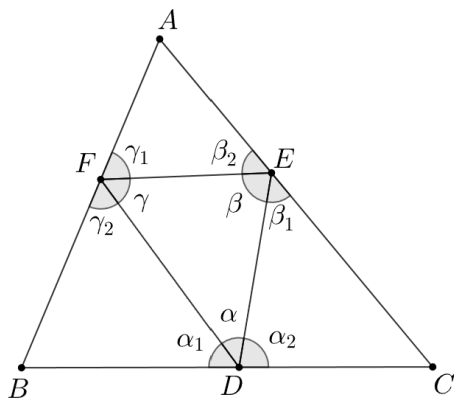


初中生都能看懂的几何题

虚空若叶睦

2025 年 7 月 16 日

在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E, F 分别是边 BC, CA, AB 上的点. 证明: $\triangle DEF$ 的周长不小于 $\triangle AEF$, $\triangle BFD$, $\triangle CDE$ 的周长中的最小值.



先证明一个引理: (这引理怎么回事? 和这题目有半点关系吗?!)

引理 对任意实数 $x, y, z > 0$, 有

$$\sqrt{\frac{yz}{(1+x+xy)(1+y+yz)}} + \sqrt{\frac{zx}{(1+y+yz)(1+z+zx)}} + \sqrt{\frac{xy}{(1+z+zx)(1+x+xy)}} \leq 1.$$

证明 令 $x = \frac{tb}{a}, y = \frac{tc}{b}, z = \frac{ta}{c}$, 其中 $t, a, b, c > 0$, 则上述不等式可写为

$$\sum_{cyc} \frac{ta}{\sqrt{(a+tb+t^2c)(b+tc+t^2a)}} \leq 1.$$

通分之后可以得到

$$t \sum_{cyc} a \sqrt{c+ta+t^2b} \leq \sqrt{\prod_{cyc} (c+ta+t^2b)}.$$

根据 Cauchy 不等式, 上式左侧满足

$$\left(\sum_{cyc} a \sqrt{c + ta + t^2 b} \right)^2 \leq \sum_{cyc} a \sum_{cyc} (ac + ta^2 + t^2 ab),$$

因此只需证明

$$t^2 \sum_{cyc} a \left((t^2 + 1) \sum_{cyc} ab + t \sum_{cyc} a^2 \right) \leq \prod_{cyc} (c + ta + t^2 b).$$

两端展开后, 可得不等式等价于

$$(t^4 - t^3 - t^2 + t) \sum_{cyc} a^2 b + (t^5 - t^4 - t^3 + t^2) \sum_{cyc} ab^2 + (t^6 - 3t^4 + 4t^3 - 3t^2 + 1) abc \geq 0.$$

容易验证上式中每一项的系数均非负, 故不等式得证. ■

现在回到原题的证明. 只需证明: 下列 3 个不等式中至少有 1 个成立:

$$\begin{aligned} DE + DF &\geq AE + AF, \\ DE + EF &\geq BD + BF, \\ DF + EF &\geq CD + CE. \end{aligned} \tag{1}$$

用反证法, 假设 3 个不等式均不成立. 设 $\angle EDF = \alpha$, $\angle BDF = \alpha_1$, $\angle CDE = \alpha_2$, $\angle DEF = \beta$, $\angle CED = \beta_1$, $\angle AEF = \beta_2$, $\angle DFE = \gamma$, $\angle AFE = \gamma_1$, $\angle BFD = \gamma_2$. 由正弦定理,

$$\frac{DE + DF}{EF} < \frac{AE + AF}{EF} \implies \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} < \frac{\sin \beta_2 + \sin \gamma_1}{\sin(\beta_2 + \gamma_1)}. \tag{2}$$

利用和差化积公式和二倍角公式,

$$\frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

于是不等式 (2) 可以转化为

$$\frac{1 + \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2}}{1 - \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2}} < \frac{1 + \tan \frac{\beta_2}{2} \tan \frac{\gamma_1}{2}}{1 - \tan \frac{\beta_2}{2} \tan \frac{\gamma_1}{2}} \implies \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} < \tan \frac{\beta_2}{2} \tan \frac{\gamma_1}{2}.$$

类似地, 可以得到:

$$\begin{cases} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} < \tan \frac{\beta_2}{2} \tan \frac{\gamma_1}{2}, \\ \tan \frac{\gamma}{2} \tan \frac{\alpha}{2} < \tan \frac{\gamma_2}{2} \tan \frac{\alpha_1}{2}, \\ \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} < \tan \frac{\alpha_2}{2} \tan \frac{\beta_1}{2}. \end{cases} \tag{3}$$

令 $a = \tan \frac{\alpha}{2}$, $b = \tan \frac{\beta}{2}$, $c = \tan \frac{\gamma}{2}$, $a_i = \tan \frac{\alpha_i}{2}$, $b_i = \tan \frac{\beta_i}{2}$, $c = \tan \frac{\gamma_i}{2}$.

由于 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = \pi$, 可以得到如下等式:

$$\begin{cases} ab + bc + ca = 1, \\ aa_1 + aa_2 + a_1a_2 = 1, \\ bb_1 + bb_2 + b_1b_2 = 1, \\ cc_1 + cc_2 + c_1c_2 = 1. \end{cases} \quad (4)$$

另外由不等式 (3), 还可以得到:

$$b_2c_1 > bc, \quad c_2a_1 > ca, \quad a_2b_1 > ab. \quad (5)$$

令 $x_i = \frac{a_i}{a}$, $y_i = \frac{b_i}{b}$, $z_i = \frac{c_i}{c}$, $i = 1, 2$, 则由 (5) 可以改写为

$$y_2z_1 > 1, \quad z_2x_1 > 1, \quad x_2y_1 > 1. \quad (6)$$

故由 (4)(6) 可以得到:

$$\frac{1}{a^2} = x_1x_2 + x_1 + x_2 > \frac{x_1}{y_1} + x_1 + \frac{1}{y_1} = \frac{1 + x_1 + x_1y_1}{y_1},$$

从而有

$$a^2 < \frac{y_1}{1 + x_1 + x_1y_1}, \quad b^2 < \frac{z_1}{1 + y_1 + y_1z_1}, \quad c^2 < \frac{x_1}{1 + z_1 + z_1x_1}. \quad (7)$$

而 $ab + bc + ca = 1$, 故由不等式 (7) 有

$$1 = ab + bc + ca < \sum_{cyc} \sqrt{\frac{y_1z_1}{(1 + x_1 + x_1y_1)(1 + y_1 + y_1z_1)}},$$

这与引理矛盾. (回旋镖就这么打回来了...) 故原命题得证.