一个二次型不等式

虚空若叶睦

2025 年 7 月 25 日

本文档将证明以下两个非常相似的不等式:

- 对任何实数 $a_1,\cdots,a_n$, 有不等式:

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_ia_j}{1+|i-j|}\geqslant 0. \tag{1}$$

- 对任何非负实数 $a_1,\cdots,a_n$, 存在与 n 无关的正常数 C, 使得

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_ia_j}{1+|i-j|}\geqslant\frac{C\log n}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2. \tag{2}$$

第一个不等式: 构造协方差矩阵

根据恒等式 $\dfrac{1}{x}=\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\mathrm{d}t$, 可以方便地把不等式 (1) 改写为

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_ia_j\int_0^\infty e^{-t(1+|i-j|)}\mathrm{d}t\geqslant 0,$$

因此只需证明: 对每个 $t\geqslant 0$, 都有不等式:

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_ia_je^{-t|i-j|}\geqslant 0. \tag{3}$$

在不等式 (3) 中, 系数矩阵 $\left[e^{-t|i-j|}\right]_{i,j=1}^{n}$ 被称为 Kac–Murdock–Szegö 矩阵, 根据 Bochner 定理, 它在 $t\in(0,1)$ 时均为正定. 这里我们使用 Markov 链给出不等式 (3) 的一个简洁证明. 设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是独立同分布的正态随机变量. 定义 Markov 链 $\{X_k\}_{k=1}^{n}$ 如下:

- $X_1 = \xi_1$;
- $X_{k+1} = e^{-t}X_k + \sqrt{1-e^{-2t}}\xi_k$, 对 $k = 1, \cdots, n-1$.

于是可以验证 $\{X_k\}_{k=1}^n$ 的协方差矩阵为

$$\mathbb{E}\big[X_i X_j\big] = e^{-t|i-j|}, \quad i, j = 1, \cdots, n.$$

而协方差矩阵必然是半正定的, 故 (3) 成立.

上面的结论容易推广到连续的情形. 可以证明: 对于区间 $[0,1]$ 上的连续函数 $a(t)$, 有:

$$\iint_{[0,1]^2} \frac{a(s)a(t)}{1+|s-t|}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \geqslant 0. \tag{4}$$

不等式 (4) 的证明只需要把 Markov 链替换连续的 Ornstein–Uhlenbeck 过程.

第二个不等式: 利用 Fourier 级数构造恒等式

不等式 (3) 可以通过以下这个神奇的恒等式直接得到:

> 对任何实数 $a_1, \cdots, a_n$, 有
>
> $$\sum_{k,l=1}^n \frac{a_k a_l}{1+|k-l|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \omega(x)|f(x)|^2 \mathrm{d}x, \tag{5}$$
>
> 其中 $\omega(x)$ 为 Fourier 系数等于 $(1+|m|)^{-1}$ 的核函数:
>
> $$\omega(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{e^{imx}}{1+|m|} = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mx)}{1+m},$$
>
> $f(x)$ 是以 $\{a_k\}_{k=1}^n$ 为系数的 Fourier 和:
>
> $$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-ikx}.$$

当 $x \neq 0$ 时, $\omega(x)$ 的表达式条件收敛. 注意到当 $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-ikx}$ 时, 有

$$|f(x)|^2 = \sum_{k,l=1}^n a_k a_l e^{-i(k-l)x},$$

于是利用 $\omega(x)$ 的表达式可立刻得到 (5). 下面证明不等式:

$$\omega(x) \geqslant \max\{0, -1-2\log|x|\}, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi]. \tag{6}$$

不妨设 $x>0$. 一方面, 注意到当 $x \in (0,\pi]$ 时, 有恒等式

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mx)}{m} = -\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right),$$

故有

$$\begin{aligned}\omega(x) &= 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(mx)}{m} - 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(mx)}{m(1+m)} \\ &\geqslant 1 - 2\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right) - 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(1+m)} \\ &\geqslant 1 - 2\log x - 2 = -1 - 2\log x.\end{aligned}$$

另一方面, 利用 $\dfrac{1}{1+|m|} = \displaystyle\int_0^1 r^{|m|}\mathrm{d}r$, 可以将 $\omega(x)$ 写为

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{imx}\int_0^1 r^{|m|}\mathrm{d}r = \int_0^1\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{imx}r^{|m|}\right)\mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x}\mathrm{d}x \geqslant 0,\end{aligned}$$

故 $\omega(x) \geqslant 0$ 恒成立. 从而不等式 (6) 成立.

最后, 当 $|x| \leqslant \dfrac{\pi}{8n}$ 时, 有不等式

$$|f(x)|^2 = \sum_{k,l=1}^{n} a_k a_l \cos((k-l)x) \geqslant \cos\frac{\pi}{4}\sum_{k,l=1}^{n} a_k a_l = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2. \tag{7}$$

综合 (5)(6)(7) 可以得到

$$
\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^{n} \frac{a_k a_l}{1+|k-l|} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \omega(x)|f(x)|^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{8n}} \omega(x)|f(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{8n}} \big(-2\log x-1\big)\frac{1}{\sqrt{2}}\bigg(\sum_{k=1}^{n} a_k\bigg)^2 \mathrm{d}x \\
&\geqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{8n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\bigg(2\log\frac{8n}{\pi}-1\bigg)\bigg(\sum_{k=1}^{n} a_k\bigg)^2 \\
&= \frac{1}{8\sqrt{2}n}\log\bigg(\frac{8n}{\pi\sqrt{e}}\bigg)\bigg(\sum_{k=1}^{n} a_k\bigg)^2 \geqslant \frac{\log n}{8\sqrt{2}n}\bigg(\sum_{k=1}^{n} a_k\bigg)^2.
\end{aligned}
$$

故在原题中取 $C=\dfrac{1}{8\sqrt{2}}$ 即可.