

倒数平方和是多少？

虚空若叶睦

2025 年 7 月 29 日

以下题目来源于北京大学杨家忠教授.

给定实数 $k > 1$. 记方程 $\tan x = kx$ 在 $(0, +\infty)$ 上的根依次为 $x_1, x_2, \dots$. 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2} = \frac{3k-1}{6(k-1)}.$$

这题乍一看挺难的, 因为 x_n 并没有显式的表达式, 只知道 $x_n \in ((n-1)\pi, (n-\frac{1}{2})\pi)$.

不严格但简洁的证明

一个与原问题非常相关的结果是:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (1)$$

等式 (1) 有一个惊人的“证明”: 由于 $\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上的根为 $\{\pm n\pi\}$, 因此可以形式地写出

$$\frac{\sin x}{x} \sim \prod_{n=1}^{\infty} (x - n\pi)(x + n\pi) = \prod_{n=1}^{\infty} (x^2 - n^2\pi^2). \quad (2)$$

于是由 (2) 可以得到

$$\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \sim \prod_{n=1}^{\infty} (x - n^2\pi^2). \quad (3)$$

在 (3) 的两端对 x 求导, 形式上可以得到

$$\frac{\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - \sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x^3}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - n^2\pi^2} \prod_{n=1}^{\infty} (x - n^2\pi^2). \quad (4)$$

将 (3)(4) 两式相除, 即可得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2 - x} = \frac{1 - \sqrt{x} \cot \sqrt{x}}{2x}. \quad (5)$$

在两端令 $x \rightarrow 0$ 可知 (5) 的右端极限为 $\frac{1}{6}$, 从而等式 (1) 成立? (这对吗?)

如果用类似的方法求解原问题, 可以考察函数

$$\frac{\sin x}{x} - k \cos x$$

这是一个偶函数, 且所有根为 $\{\pm x_n : n \in \mathbb{N}\}$. 因此可以形式地写出

$$\frac{\sin x}{x} - k \cos x \sim \prod_{n=1}^{\infty} (x^2 - x_n^2) \implies \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - k \cos \sqrt{x} \sim \prod_{n=1}^{\infty} (x - x_n^2). \quad (6)$$

在两边对 x 求导, 有

$$\frac{\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - \sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x^3}} + \frac{k \sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - x_n^2} \prod_{n=1}^{\infty} (x - x_n^2). \quad (7)$$

将 (6)(7) 两式相除可以得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2} = - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - \sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x^3}} + \frac{k \sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - k \cos \sqrt{x}} \right) = - \frac{-\frac{1}{6} + \frac{k}{2}}{1 - k} = \frac{3k - 1}{6(k - 1)}. \quad (8)$$

因此可以得到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$. (如何严格证明呢?)

严格证明: 复变函数

由于目标表达式是分式求和形式, 一个自然的想法是利用复变函数及留数的性质构造恒等式. 根据 (6), 可以定义 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数

$$f(z) = \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} - k \cos \sqrt{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{1}{2n+1} - k \right) z^n. \quad (9)$$

下面来验证 $f(z)$ 的一些简单性质.

引理 1 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中的所有零点是 $\{x_n^2 : n \in \mathbb{N}\}$.

证明 注意到 $f(w^2) = \frac{\sin w}{w} - k \cos w$, 故只需等价地证明, 方程

$$\sin w = kw \cos w \quad (10)$$

在 $\mathbb{C}$ 中的所有零点是 $\{\pm x_n : n \in \mathbb{N}\}$. 利用表达式

$$\sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}, \quad \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$

可以将 (10) 改写为

$$e^{iw} - e^{-iw} = ikw(e^{iw} + e^{-iw}).$$

再令 $w = x + iy$, 其中 x, y 为实数, 则上式可以改写为

$$k = \frac{(2 \sin x \cosh y + 2i \cos x \sinh y)(2 \cos x \cosh y + 2i \sin x \sinh y)}{(2 \cos x \cosh y)^2 + (2 \sin x \sinh y)^2}.$$

由于上式的实部必须为 0, 可以得到 $\sinh(2y) = 0$, 从而 $y = 0$. 故 w 为实数.

由于 $\frac{\sin x}{x} - k \cos x$ 为偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上的根恰好为 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, 引理得证. ■

根据引理 1, 我们来定义另一个函数

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z - x_n^2}. \quad (11)$$

由于 $x_n = O(n)$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z - x_n^2}$ 在 $z \neq x_n^2$ 时绝对收敛. 因此 $g(z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{x_n^2\}$ 上为全纯函数.

下面证明: x_n^2 总是 $g(z)$ 的可去奇点. 事实上, 根据导数的定义可以得到

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow x_n^2} (z - x_n^2)g(z) &= \lim_{z \rightarrow x_n^2} \left(\frac{(z - x_n^2)f'(z)}{f(z)} - 1 \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow x_n^2} \frac{(z - x_n^2)f'(z) - f(z)}{f(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow x_n^2} \frac{f'(z) + (z - x_n^2)f''(z) - f'(z)}{f'(z)} \quad (\text{L'Hôpital 法则}) \\ &= \lim_{z \rightarrow x_n^2} (z - x_n^2) \frac{f''(x_n^2)}{f'(x_n^2)} = 0. \end{aligned}$$

因此由 Riemann 可去奇点定理知 x_n^2 是 $g(z)$ 的可去奇点. 进而, $g(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上为全纯函数.

引理 2 $g(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上全局有界.

证明 由于 $g(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数, 根据最大模原理, 只需证明对每个非零整数 m , $g(w^2)$ 在

$$L_m^1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) = m\pi\}, \quad L_m^2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(w) = m\pi\}.$$

上全局有界. 由于 $g(w^2)$ 本身是关于 w 的偶函数, 所以只需考察 m 是正整数的情形. 即证明: 存在不依赖于正整数 m 的常数 C_1, C_2 ,

$$\frac{|f'(w^2)|}{|f(w^2)|} \leq C_1, \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{w^2 - x_n^2} \right| \leq C_2, \quad \forall w \in L_m^1 \cup L_m^2. \quad (12)$$

关于 C_1 的估计 利用 (8) 中的计算结果可以得到: 当 $m \neq 0$ 且 $w \in L_m^1 \cup L_m^2$ 时,

$$\left| \frac{f'(w^2)}{f(w^2)} \right| = \left| \frac{\frac{w \cos w - \sin w}{2w^3} + \frac{k \sin w}{2w}}{\frac{\sin w}{w} - k \cos w} \right| \leq (k+2) \frac{\left| \frac{\sin w}{w} \right| + |\cos w|}{\left| \frac{\sin w}{w} - k \cos w \right|} = (k+2) \frac{1 + \left| \frac{w}{\tan w} \right|}{\left| \frac{kw}{\tan w} - 1 \right|}$$

因此, C_1 的估计成立的充分条件是: 当 $w \in L_m^1 \cup L_m^2$ 时,

$$\left| \frac{w}{\tan w} \right| \geq 1 \quad (13)$$

为了证明 (13), 考虑 $w \in L_m^1$ 和 L_m^2 两种情形.

- 当 $w \in L_m^1$ 时, 设 $w = m\pi + iy$, 其中 $y \in \mathbb{R}$. 则

$$\tan w = \tan(iy) = \frac{\sin(iy)}{\cos(iy)} = i \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}.$$

于是可得到

$$\frac{w}{\tan w} = (y - im\pi) \cdot \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1} \implies \left| \frac{w}{\tan w} \right| = y \cdot \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1} \geq 1,$$

因此 (13) 在 $w \in L_m^1$ 时成立.

- 当 $w \in L_m^2$ 时, 设 $w = y + im\pi$, 其中 $y \in \mathbb{R}$. 则

$$\tan w = \tan(y + im\pi) = \frac{\tan y + i \tanh(m\pi)}{1 - i \tan y \tanh(m\pi)},$$

从而

$$\frac{w}{\tan w} = (y + im\pi) \cdot \frac{1 - i \tan y \tanh(m\pi)}{\tan y + i \tanh(m\pi)} \implies \left| \frac{w}{\tan w} \right| \geq m\pi \sqrt{\frac{1 + \tan^2 y \tanh^2(m\pi)}{\tan^2 y + \tanh^2(m\pi)}}.$$

由于 $|\tanh(m\pi)| \leq 1$ 恒成立, 有不等式

$$\sqrt{\frac{1 + \tan^2 y \tanh^2(m\pi)}{\tan^2 y + \tanh^2(m\pi)}} \geq \tanh(m\pi),$$

从而可得

$$\left| \frac{w}{\tan w} \right| \geq m\pi \tanh(m\pi) \geq \pi \tanh(\pi) > 1.$$

因此 (13) 在 $w \in L_m^2$ 时成立.

综上所述, $\left| \frac{f'(w^2)}{f(w^2)} \right| \leq C_1$ 在 $w \in L_m^1 \cup L_m^2$ 上恒成立.

关于 C_2 的估计 根据三角不等式, 只需证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|w^2 - x_n^2|} \leq C_2, \quad \forall w \in L_m^1 \cup L_m^2. \quad (14)$$

为了证明 (14), 考虑 $w \in L_m^1$ 和 L_m^2 两种情形.

- 当 $w \in L_m^1$ 时, 设 $w = m\pi + iy$, 其中 $y \in \mathbb{R}$. 此时有

$$\begin{aligned} |w^2 - x_n^2| &= |w - x_n||w + x_n| = |m\pi - x_n + iy||m\pi + x_n + iy| \\ &\geq |m^2\pi^2 - x_n^2| \geq (m\pi - x_n)^2. \end{aligned}$$

因此 (14) 可以改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m\pi - x_n)^2} \leq C_2. \quad (15)$$

由于 $x_n \in ((n-1)\pi, (n-\frac{1}{2})\pi)$, 可定义 $y_n = x_n - (n-1)\pi \in (0, \frac{\pi}{2})$. 于是有不等式

$$\tan y_n = k(y_n + (n-1)\pi) \geq ky_n \implies y_n \geq \sin y_n \geq k \cos y_n \geq k \left(1 - \frac{y_n^2}{2}\right),$$

从而有 $\frac{\pi}{2} \geq y_n \geq \frac{\sqrt{2k^2+1}-1}{k}$ 对一切正整数 n 成立.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m\pi - x_n)^2} &= \sum_{n=1}^m \frac{1}{(m\pi - x_n)^2} + \frac{1}{(x_{m+1} - m\pi)^2} + \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{1}{(x_n - m\pi)^2} \\ &\leq \frac{1}{y_{m+1}^2} + \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_{n=1}^m \frac{1}{(m-n+\frac{1}{2})^2} + \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{1}{(n-1-m)^2} \right) \\ &\leq \left(\frac{k}{\sqrt{2k^2+1}-1} \right)^2 + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2} < +\infty. \end{aligned}$$

故 (15) 成立, $w \in L_m^1$ 的情形得证.

- 当 $w \in L_m^2$ 时, 设 $w = y + im\pi$, 其中 $y \in \mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned} |w^2 - x_n^2| &= |w - x_n||w + x_n| = |y - x_n + im\pi||y + x_n + im\pi| \\ &= \sqrt{((y - x_n)^2 + m^2\pi^2)((y + x_n)^2 + m^2\pi^2)} \\ &\geq |y^2 - x_n^2| + \pi^2. \end{aligned} \quad (\text{Cauchy 不等式})$$

于是只需证明: 存在不依赖于 $y \geq 0$ 的常数 C_2 , 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|y^2 - x_n^2| + \pi^2} \leq C_2. \quad (16)$$

注意不等式 (16) 不依赖于 m . 给定 $y \geq 0$, 存在唯一的正整数 m 使得 $(m-1)\pi \leq y < m\pi$. 又 $x_n \in ((n-1)\pi, n\pi)$, (16) 的左端可以表示为

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|y^2 - x_n^2| + \pi^2} &\leq \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{y^2 - x_n^2 + \pi^2} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2 - y^2 + \pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \\ &\leq \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{(m-n-1)^2 + 1} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(n-m-1)^2 + 1} + \frac{1}{\pi^2} \\ &\leq \frac{1}{\pi^2} \left(1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \right) < +\infty. \end{aligned}$$

故 (15) 成立, 从而 $w \in L_m^2$ 的情形得证.

综上所述, 全纯函数 $g(z)$ 在直线 L_m^1 和 L_m^2 上有界. 由最大模原理, $g(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上全局有界. ■

根据上述结果, $g(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上全局有界的全纯函数, 由 Liouville 定理, $g(z)$ 一定是常数函数. 不妨设 $g(z) \equiv G$, 其中 $G \in \mathbb{C}$. 则由 (11) 可得

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z - x_n^2} = G. \quad (17)$$

在 (17) 中取 $z = -(m\pi)^2$, 则可验证 (17) 的左端在 $m \rightarrow \infty$ 时的极限为 0. 最终, 我们得到

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z - x_n^2}. \quad (18)$$

取 $z = 0$ 并应用 (8) 即可得到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2} = \frac{3k-1}{6(k-1)}$, 结论得证.