

三角函数恒等式

虚空若叶睦

2025 年 7 月 15 日

本文档将介绍一些三角函数恒等式的计算方法. 参考资料包括 Victor Moll 的论文 An Elementary Trigonometric Equation 和 Art of Problem Solving 上的部分讨论.

1 构造多项式

如果目标等式关于各个三角函数呈现对称性, 则可以尝试构造以三角函数为根的多项式. 例如, 方程 $\cos 4\alpha = -\cos 3\alpha$ 在 $\alpha \in [0, \pi]$ 时的解为

$$\alpha = \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \pi.$$

而另一方面, $\cos 4\alpha = -\cos 3\alpha$ 可以写为关于 $x = \cos \alpha$ 的四次方程:

$$(x+1)(8x^3 - 4x^2 - 4x + 1) = 0,$$

因此 $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$ 对应的三个根恰好为 $\cos \frac{\pi}{7}, \cos \frac{3\pi}{7}, \cos \frac{5\pi}{7}$. 这可以得到:

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} &= \frac{1}{2}, \\ \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} &= -\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

根据该结果可以继续证明

$$\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

事实上, 两边平方后可以得到

$$\begin{aligned}\left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7}\right)^2 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} \right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \right) = \frac{7}{4}.\end{aligned}$$

更进一步, 可以证明

$$\cos \frac{5\pi}{28} + \cos \frac{11\pi}{28} + \cos \frac{13\pi}{28} = \frac{\sqrt{7}+1}{2\sqrt{2}}.$$

事实上, 两边平方后可以得到

$$\begin{aligned} & \left(\cos \frac{5\pi}{28} + \cos \frac{11\pi}{28} + \cos \frac{13\pi}{28} \right)^2 \\ &= \cos^2 \frac{5\pi}{28} + \cos^2 \frac{11\pi}{28} + \cos^2 \frac{13\pi}{28} + 2 \cos \frac{5\pi}{28} \cos \frac{11\pi}{28} + 2 \cos \frac{11\pi}{28} \cos \frac{13\pi}{28} + 2 \cos \frac{5\pi}{28} \cos \frac{13\pi}{28} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14} + \cos \frac{13\pi}{14} \right) + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{14} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{14} + \cos \frac{3\pi}{14} - \cos \frac{5\pi}{14} \right) + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \right) - \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} - \cos \frac{5\pi}{7} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{7}}{4}. \end{aligned}$$

因此等式得证. 类似地还可以证明

$$\cos \frac{\pi}{28} - \cos \frac{3\pi}{28} + \cos \frac{9\pi}{28} = \frac{\sqrt{7}-1}{2\sqrt{2}}.$$

另一方面, 方程 $\tan 4\alpha = -\tan 3\alpha$ 在 $\alpha \in [0, \pi)$ 时的解为

$$\alpha = 0, \frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}.$$

若将 $\tan 4\alpha = -\tan 3\alpha$ 改写为 $x = \tan \alpha$ 的方程, 则可得到

$$(x^3 - 7x)^2 = 7(x^2 + 1)^2.$$

根据 $\tan \alpha$ 的符号, 可以得到两个多项式:

- $x^3 + \sqrt{7}x^2 - 7x + \sqrt{7} = 0$ 的三个根为 $\tan \frac{\pi}{7}, \tan \frac{2\pi}{7}, \tan \frac{4\pi}{7}$.
- $x^3 - \sqrt{7}x^2 - 7x - \sqrt{7} = 0$ 的三个根为 $\tan \frac{3\pi}{7}, \tan \frac{5\pi}{7}, \tan \frac{6\pi}{7}$.

于是可以得到如下等式:

$$\begin{aligned} \cot \frac{\pi}{7} + \cot \frac{2\pi}{7} + \cot \frac{4\pi}{7} &= \sqrt{7}, \\ \cot^2 \frac{\pi}{7} + \cot^2 \frac{2\pi}{7} + \cot^2 \frac{4\pi}{7} &= 5. \end{aligned}$$

考察方程 $\cos 3\alpha = -\frac{1}{2}$ 的解, 可以得到: 方程

$$8x^3 - 6x + 1 = 0$$

的三个根恰好为 $\cos \frac{2\pi}{9}, \cos \frac{4\pi}{9}, \cos \frac{8\pi}{9}$. 于是有

$$\begin{aligned}\cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} &= 0, \\ \left(1 + 2\cos \frac{2\pi}{9}\right) \left(1 + 2\cos \frac{4\pi}{9}\right) \left(1 + 2\cos \frac{8\pi}{9}\right) &= -3, \\ \frac{1}{1 + 2\cos \frac{2\pi}{9}} + \frac{1}{1 + 2\cos \frac{4\pi}{9}} + \frac{1}{1 + 2\cos \frac{8\pi}{9}} &= 0, \\ \cos^7 \frac{\pi}{9} + \cos^7 \frac{5\pi}{9} + \cos^7 \frac{7\pi}{9} &= \frac{63}{128}, \\ \frac{1}{1 - \cos \frac{\pi}{9}} + \frac{1}{1 - \cos \frac{5\pi}{9}} + \frac{1}{1 - \cos \frac{7\pi}{9}} &= 18.\end{aligned}$$

考察方程 $\tan 3\alpha = \sqrt{3}$ 的解, 可以得到: 方程

$$x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$$

的三个根恰好为 $\tan \frac{\pi}{9}, \tan \frac{4\pi}{9}, \tan \frac{7\pi}{9}$. 由此可得

$$\begin{aligned}\tan^2 \frac{\pi}{9} + \tan^2 \frac{2\pi}{9} + \tan^2 \frac{4\pi}{9} &= 33, \\ \tan^6 \frac{\pi}{9} + \tan^6 \frac{2\pi}{9} + \tan^6 \frac{4\pi}{9} &= 33273.\end{aligned}$$

2 sin 和 tan 的线性组合

有一类三角函数恒等式具有 $\tan a + B \sin b = C$ 的形式, 它可以等价地写为

$$\sin a + \frac{1}{2}B \sin(a+b) - \frac{1}{2}\sin(a-b) = C \cos a.$$

两边平方后可以得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(2 - 2C^2 + B^2) &= \frac{1}{4}(2 + 2C^2 - 2B^2) \cos(2a) + \frac{1}{8}B^2 \cos(2a+2b) + \frac{1}{8}B^2 \cos(2a-2b) \\ &+ \frac{1}{2}B \cos(2a+b) + \frac{1}{4}B^2 \cos(2b) - \frac{1}{2}B \cos(2a-b).\end{aligned}\quad (*)$$

若能找到一些特殊的常数 a, b, c 和 B, C 使得 $(*)$ 成立, 则可构造特殊的三角函数恒等式.

- 取 $B = 4$, $C^2 = 11$, 则 $(*)$ 可转化为

$$\cos(2a - 2b) - \cos(2a - b) + \cos(2a) + \cos(2a + b) + \cos(2a + 2b) + 2\cos(2b) = -\frac{1}{2}.$$

于是取 $a = \frac{3k\pi}{11}$, $b = \frac{2k\pi}{11}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \not\equiv 0 \pmod{11}$, 可得到等式

$$\tan\left(\frac{3k\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2k\pi}{11}\right) = \pm\sqrt{11}.$$

特别地, 当 $3k \equiv 1, 2, 3, 4, 5 \pmod{11}$ 时分别有

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{3\pi}{11}\right) &= \sqrt{11}, \\ \tan\left(\frac{2\pi}{11}\right) - 4\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right) &= -\sqrt{11}, \\ \tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) &= \sqrt{11}, \\ \tan\left(\frac{4\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{\pi}{11}\right) &= \sqrt{11}, \\ \tan\left(\frac{5\pi}{11}\right) - 4\sin\left(\frac{4\pi}{11}\right) &= \sqrt{11}.\end{aligned}$$

- 取 $B = 4$, $C^2 = 3$ 且 $a = b$, 则 $(*)$ 可改写为

$$-\cos a + \cos(2a) + \cos(3a) + \cos(4a) = \frac{1}{2}.$$

上式等价于

$$\frac{\sin(5a/2)\cos(2a)}{\sin(a/2)} = \frac{1}{2}(3 + 4\cos a) \iff \sin(9a/2) = 2\sin(3a/2).$$

从上式可以解得

$$a = \frac{\pi}{9} \times \{1, 5, 6, 7, 11, 12\} + \frac{12m\pi}{9}.$$

因此可得到下列等式:

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{9}\right) + 4\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) &= \sqrt{3}, \\ \tan\left(\frac{2\pi}{9}\right) - 4\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) &= -\sqrt{3}, \\ \tan\left(\frac{4\pi}{9}\right) - 4\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) &= \sqrt{3}.\end{aligned}$$

- 取 $B = -4$, $C^2 = 7$ 且 $2a = b$, 可以从 (*) 得到如下等式:

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{7}\right) - 4\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) &= -\sqrt{7}, \\ \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) - 4\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) &= -\sqrt{7}, \\ \tan\left(\frac{3\pi}{7}\right) - 4\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) &= \sqrt{7}.\end{aligned}$$

3 平方 Gauss 和定理

平方 Gauss 和定理的内容如下: 设 n 是正整数, 则

$$G_n = \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i j^2}{n}} = \begin{cases} (1+i)\sqrt{n}, & \text{若 } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \sqrt{n}, & \text{若 } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ 0, & \text{若 } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ i\sqrt{n}, & \text{若 } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

上述结果本质上是 Gauss 二次互反律的三角形式. 虽然它造型优美, 但是其证明并非初等, 需要用到解析数论的相关知识.

平方 Gauss 和定理可以用来构造 n 次单位根满足的较低次数的多项式 (比分圆多项式的次数都低). 例如, 由 $G_{11} = i\sqrt{11}$ 可以得到 11 次单位根 $x = e^{\frac{2\pi i}{11}}$ 满足

$$1 + 2(x + x^3 + x^4 + x^5 + x^9) = i\sqrt{11}.$$

于是, 根据等式

$$4i \sin \frac{2\pi}{11} = 2(x - x^{-1}) = 2(x - x^{10})$$

和

$$\begin{aligned}i \tan \frac{3\pi}{11} &= \frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}} = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} = \frac{x^3 - x^{33}}{x^3 + 1} \\ &= x^3(1 - x^{15}) \frac{1 + x^{15}}{1 + x^3} \\ &= x^3(1 - x^4)(1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12}) \\ &= -x - x^2 + x^3 + x^4 + x^5 - x^6 - x^7 - x^8 + x^9 + x^{10},\end{aligned}$$

可以得到

$$\begin{aligned} i \tan \frac{3\pi}{11} + 4i \sin \frac{2\pi}{11} &= 1 + 2(x + x^3 + x^4 + x^5 + x^9) - (1 + x + x^2 + \cdots + x^{10}) \\ &= 1 + 2(x + x^3 + x^4 + x^5 + x^9) = i\sqrt{11}, \end{aligned}$$

于是再次得到等式 $\tan \frac{3\pi}{11} + 4 \sin \frac{2\pi}{11} = \sqrt{11}$. 利用平方 Gauss 和定理还可以证明如下结果:

$$\begin{aligned} \tan \frac{2\pi}{7} + 4 \sin \frac{2\pi}{7} - 4 \sin \frac{\pi}{7} &= \sqrt{7}, \\ \tan \frac{4\pi}{19} + 4 \sin \frac{5\pi}{19} - 4 \sin \frac{6\pi}{19} + 4 \sin \frac{9\pi}{19} &= \sqrt{19}, \\ \tan \frac{\pi}{9} + 2 \sin \frac{\pi}{9} - 2 \sin \frac{2\pi}{9} + 2 \sin \frac{4\pi}{9} &= \sqrt{3}, \\ \sqrt{3} \tan \left(\frac{7\pi}{18} \right) - 4 \sin \left(\frac{7\pi}{18} \right) &= 1. \end{aligned}$$

这些等式也可以用乘上 $\cos$ 再平方的方法证明.

4 n 次单位根的经典结果

以下介绍与 n 次单位根相关的经典结果. 由于 n 次单位根 $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 满足

$$1 + \zeta + \cdots + \zeta^{n-1} = 0,$$

因此容易得到

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(\frac{2k\pi}{n} \right) = 0.$$

根据二倍角公式, 还有

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 \left(\frac{2k\pi}{n} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2 \left(\frac{2k\pi}{n} \right) = \frac{n}{2}.$$

下面证明一些稍难的结论. 首先是正弦函数的乘积:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \frac{n}{2^{n-1}}. \quad (1)$$

为证明 (1), 注意到 n 次单位根 ζ 满足

$$1 + x + \cdots + x^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (x - \zeta^k).$$

令 $x = 1$, 即可得到

$$\prod_{k=1}^{n-1} |1 - \zeta^k| = n.$$

然而, $|1 - \zeta^k| = |e^{\frac{k\pi i}{n}} - e^{-\frac{k\pi i}{n}}| = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, 因此由上式立刻得到 (1) 成立. 利用同样的方法, 可以得到余弦函数的乘积:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数}, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} n, & n \text{ 为奇数}. \end{cases} \quad (2)$$

将 (1)(2) 两式相除, 即可得到: 当 n 为奇数时,

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sqrt{n}.$$

接下来证明: 对一切正整数 $n > 1$, 有

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{n^2 - 1}{3}. \quad (3)$$

下面将介绍 4 种截然不同的证明方法.

1. 利用 de Moivre 定理

注意到 $\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \cot^2 \theta$, 故 (3) 等价于

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cot^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{(n-1)(n-2)}{3}. \quad (4)$$

根据 de Moivre 定理, 对任意 $\theta \in [0, 2\pi]$ 有

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \sum_{j=0}^n C_n^j (\cos \theta)^{n-j} (i \sin \theta)^j.$$

比较两边的虚部可以得到

$$\sin n\theta = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k C_n^{2k+1} \cos^{n-2k-1} \theta \sin^{2k+1} \theta = C_n^1 \cos^{n-1} \theta \sin \theta - C_n^3 \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \dots$$

在两边除以 $\sin^n \theta$ 之后即得

$$\frac{\sin n\theta}{\sin^n \theta} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k C_n^{2k+1} \cot^{n-2k-1} \theta.$$

注意到, 上式左侧在 $\theta = \frac{k\pi}{n}$, $k = 1, \dots, n-1$ 时为 0, 而右侧是关于 $\cot \theta$ 的 $n-1$ 次多项式, 于是 $n-1$ 次多项式

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k C_n^{2k+1} t^{n-2k-1} = C_n^1 t^{n-1} - C_n^3 t^{n-3} + C_n^5 t^{n-5} - \dots$$

的 $n-1$ 个根恰好为 $\cot \frac{k\pi}{n}$, $k = 1, \dots, n-1$. 为计算 (4), 只需计算 $P(t)$ 的 $n-1$ 个根的平方和. 为方便起见, 记 $P(t)$ 的 $n-1$ 个根分别为 $t_1, \dots, t_{n-1}$. 据 Vieta 定理,

$$\sum_{k=1}^{n-1} t_k = 0, \quad \sum_{1 \leq k < l \leq n} t_k t_l = -\frac{C_n^3}{C_n^1} = -\frac{(n-1)(n-2)}{6}.$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n-1} t_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} t_k \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} t_k t_l = \frac{(n-1)(n-2)}{3},$$

即 (4) 成立, 故 (3) 得证.

2. 幂级数的展开

令 $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 为 n 次单位根, 则等式 (3) 可以等价地写为

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|1 - \zeta^k|^2} = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\zeta^k}{(1 - \zeta^k)^2} = \frac{n^2 - 1}{12}. \quad (5)$$

定义函数 $f_n(t) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\zeta^k}{(1 - t\zeta^k)^2}$, 则将 $f_n(t)$ 展开为 t 的幂级数可得

$$f_n(t) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\zeta^k}{(1 - t\zeta^k)^2} = -\sum_{k=1}^{n-1} \zeta^k \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) t^m \zeta^{km} = -\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) t^m \sum_{k=1}^{n-1} \zeta^{k(m+1)}. \quad (6)$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{n-1} \zeta^{k(m+1)} = \begin{cases} n-1, & \text{若 } n \mid m+1, \\ -1, & \text{若 } n \nmid m+1. \end{cases}$$

因此由 (6) 可以得到

$$\begin{aligned} f_n(t) &= - \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)t^m (-1 + n \cdot 1_{\{n \mid m+1\}}) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)t^m - n \sum_{m: n \mid m+1} (m+1)t^m \\ &= \frac{1}{(1-t)^2} - n \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)nt^{(k+1)n-1} \\ &= \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{n^2 t^{n-1}}{(1-t^n)^2}. \end{aligned}$$

接下来只需证明:

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{n^2 t^{n-1}}{(t^n-1)^2} \right) = \frac{n^2-1}{12}. \quad (7)$$

直接计算可以得到

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{n^2 t^{n-1}}{(t^n-1)^2} \right) &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k \right)^2 - n^2 t^{n-1}}{(t^n-1)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2 \sum_{k=0}^{n-1} t^k \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)t^k - n^2(n-1)t^{n-2}}{2n(t^n-1)} \quad (\text{L'Hôpital 法则}) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2 \sum_{k=0}^{n-1} t^k \sum_{k=0}^{n-3} (k+2)(k+1)t^k + 2 \left(\sum_{k=0}^{n-2} (k+1)t^k \right)^2 - n^2(n-1)(n-2)t^{n-3}}{2n^2} \\ &= \frac{2n \sum_{k=0}^{n-3} (k+2)(k+1) + 2 \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)^2 - n^2(n-1)(n-2)}{2n^2} \\ &= \frac{\frac{2n^2(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n^2(n-1)^2}{2} - n^2(n-1)(n-2)}{2n^2} = \frac{n^2-1}{12}. \end{aligned}$$

故 (7) 成立, 等式 (3) 得证.

3. 参数化后展开分式

首先来证明一个一般化的结果: 设 $a \in \mathbb{R}$ 且 $|a| \neq 1$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a^2 + 1 - 2a \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} = \frac{n(a^n + 1)}{(a^2 - 1)(a^n - 1)} - \frac{1}{(a - 1)^2}. \quad (8)$$

令 $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 为 n 次单位根, 则 (8) 可以等价写为

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|a - \zeta^k|^2} = \frac{n(a^n + 1)}{(a^2 - 1)(a^n - 1)} - \frac{1}{(a - 1)^2}. \quad (9)$$

由于 $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \zeta^k)$, 在两边对 z 取对数后得

$$\ln(z^n - 1) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(z - \zeta^k).$$

在两边对 z 求导后可得

$$\frac{nz^{n-1}}{z^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z - \zeta^k}. \quad (9)$$

当 $|a| \neq 1$ 时, 有

$$\frac{1}{|a - \zeta|^k} = \frac{1}{(a - \zeta^k)(a - \zeta^{-k})} = \frac{1}{a^2 - 1} \left(\frac{a}{a - \zeta^k} - \frac{1}{1 - a\zeta^k} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

在等式两端对 $k = 0, 1, \dots, n-1$ 求和, 并利用 (9) 可以得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{|a - \zeta^k|^2} &= \frac{1}{a^2 - 1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{a - \zeta^k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 - a\zeta^k} \right) \\ &= \frac{1}{a^2 - 1} \left(\frac{na^n}{a^n - 1} + \frac{n}{a^n - 1} \right) = \frac{n(a^n + 1)}{(a^2 - 1)(a^n - 1)}. \end{aligned}$$

于是(8)得证. 最后, 在(8)中令 $a \rightarrow 1$ 可得所需结果. 作换元 $a = 1 + t$, 则

$$\begin{aligned}
& \lim_{a \rightarrow 1} \frac{n(a^n + 1)}{(a^2 - 1)(a^n - 1)} - \frac{1}{(a - 1)^2} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{n[(1 + t)^n + 1]}{t(t + 2)[(1 + t)^n - 1]} - \frac{1}{t^2} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{n[2 + C_n^1 t + C_n^2 t^2 + o(t^2)]}{t(t + 2)[C_n^1 t + C_n^2 t^2 + C_n^3 t^3 + o(t^3)]} - \frac{1}{t^2} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{n\left(2 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2\right)}{nt^2(t + 2)\left(1 + \frac{n-1}{2}t + \frac{(n-1)(n-2)}{6}t^2\right)} - \frac{1}{t^2} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(2 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2\right) - (t + 2)\left(1 + \frac{n-1}{2}t + \frac{(n-1)(n-2)}{6}t^2\right)}{t^2(t + 2)\left(1 + \frac{n-1}{2}t + \frac{(n-1)(n-2)}{6}t^2\right)} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 - (t + 2) - \frac{n-1}{2}t(t + 2) - \frac{(n-1)(n-2)}{3}t^2}{2t^2} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{n(n-1)}{2}t^2 - \frac{n-1}{2}t^2 - \frac{(n-1)(n-2)}{3}t^2}{2t^2} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{(n-1)^2}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{3} \right) = \frac{n^2 - 1}{12}.
\end{aligned}$$

因此由(8)可以得到

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} = \frac{n^2 - 1}{6},$$

于是(3)成立. 注意到(8)也可以写为

$$\frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a^2 + 1 - 2a \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} = \frac{2\pi(a^n + 1)}{(a^2 - 1)(a^n - 1)}.$$

当 $|a| \neq 1$ 时, 在上式中令 $n \rightarrow \infty$ 可以得到经典积分结果:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 + 1 - 2a \cos \theta} = \frac{1}{|a^2 - 1|}.$$

4. 化归为矩阵特征值

先证明下面的等式:

$$2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2(\frac{k\pi}{n})} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n})}. \quad (10)$$

利用二倍角公式, 容易看出 (10) 等价于

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \cos^2(\frac{k\pi}{n})} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \cos(\frac{k\pi}{n})} \iff \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(\frac{k\pi}{n})}{1 - \cos^2(\frac{k\pi}{n})} = 0.$$

由于 $\cos(\frac{k\pi}{n}) + \cos(\frac{(n-k)\pi}{n}) = 0$, 故由对称性可知上式成立, 从而 (10) 成立. 接下来只需证明

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n})} = \frac{2(n^2 - 1)}{3}. \quad (11)$$

令 A_n 是主对角线为 1, 次对角线为 -1 的三对角矩阵:

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

则 A_n 的全部特征值为

$$\lambda_k = 2 - 2 \cos \frac{k\pi}{n+1} = 4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(n+1)} \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

因此 (11) 可改写为

$$\text{tr}(A_n^{-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} = \frac{n(n+2)}{6}. \quad (12)$$

根据逆矩阵的定义, A_n^{-1} 的对角线元素可以写为

$$(A_n^{-1})_{i,i} = \frac{C_{i,i}}{\det(A_n)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

其中 $C_{i,i}$ 是 A_n 在 (i, i) 处的代数余子式. 于是, (12) 可等价写为

$$\frac{1}{\det(A_n)} \sum_{i=1}^n C_{i,i} = \frac{n(n+2)}{6}. \quad (13)$$

一方面, $\det(A_n)$ 可以通过对第一行作 Laplace 展开得到:

$$\det(A_n) = 2 \det(A_{n-1}) - (-1) \det \begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & A_{n-2} \end{bmatrix} = 2 \det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}),$$

于是由数学归纳法可得 $\det(A_n) = n + 1$. 另一方面, 容易看出

$$C_{i,i} = \det \begin{bmatrix} A_{i-1} & 0 \\ 0 & A_{n-i} \end{bmatrix} = \det(A_{i-1}) \det(A_{n-i}) = i(n-i+1).$$

故有

$$\frac{1}{\det(A_n)} \sum_{i=1}^n C_{i,i} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n i(n-i+1) = \frac{n(n+2)}{6}.$$

从而 (13) 成立, 等式 (3) 得证.