积分发散函数的比较

虚空若叶睦

2025 年 8 月 2 日

在 PiKaChu345 的视频 BV1Evh7z3EWj 中提到了一个发散级数的比较问题:

> 若非负数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, 证明:
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \min\left\{a_n, \frac{1}{n}\right\} = +\infty.$$

视频使用了 Cauchy 凝聚判别法证明该结果. 下面给出该问题的连续版本:

> 若非负函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续单调递减, 且 $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = +\infty$, 证明:
>
> $$\int_1^{\infty} \min\left\{f(x), \frac{1}{x}\right\} = +\infty.$$

容易看出, 从连续版本可以直接得到级数版本的证明. 下面给出连续版本的证明:

证明 1. 化归为分段线性函数

首先, 可以不妨设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是连续的分段线性函数. 事实上, 对于一般的连续函数 $f(x)$, 可以在每个区间 $[n, n+1]$ 用一个分段线性函数 $f_n(x)$ 对 $f(x)$ 进行近似, 且使得

- 端点重合: $f_n(n) = f(n)$, $f_n(n+1) = f(n+1)$;
- 单调递减: $f_n(x)$ 在 $[n, n+1]$ 上单调递减;
- 一致逼近: $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 1/n^2$, 对任意 $x \in [n, n+1]$ 成立.

由于 $f(x)$ 在 $[n,n+1]$ 上一致连续, 所有这样的 $f_n(x)$ 可以通过简单的均匀线性插值来得到. 在定义了函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 后, 定义分片线性函数

$$\tilde{f}(x)=f_n(x),\qquad x\in[n,n+1].$$

则可以验证

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\tilde{f}(x)\mathrm{d}x&\geqslant\int_1^{\infty}f(x)\mathrm{d}x-\int_1^{\infty}|\tilde{f}(x)-f(x)|\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_1^{\infty}f(x)\mathrm{d}x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=+\infty\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\min\left\{f(x),\frac{1}{x}\right\}\mathrm{d}x&\geqslant\int_1^{\infty}\min\left\{\tilde{f}(x),\frac{1}{x}\right\}\mathrm{d}x-\int_1^{\infty}|\tilde{f}(x)-f(x)|\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_1^{\infty}\min\left\{\tilde{f}(x),\frac{1}{x}\right\}\mathrm{d}x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\end{aligned}$$

因此只需要证明 $\min\{\tilde{f}(x),\frac{1}{x}\}$ 的积分发散. 这使我们化归为 $f(x)$ 为分段线性函数的情形.

2. 构造交替出现的增减零点

令 $f(x)$ 是分段线性函数, 且不妨设 $f(1)<1$, 否则可取一个充分小的 $c<0$, 并用 $cf(x)$ 代替 $f(x)$ 进行讨论. 下面考察 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上的零点. 由于 $\frac{1}{x}$ 为严格凸函数, 故 $f(x)=\frac{1}{x}$ 只有孤立的零点. 下面重点考察两类零点:

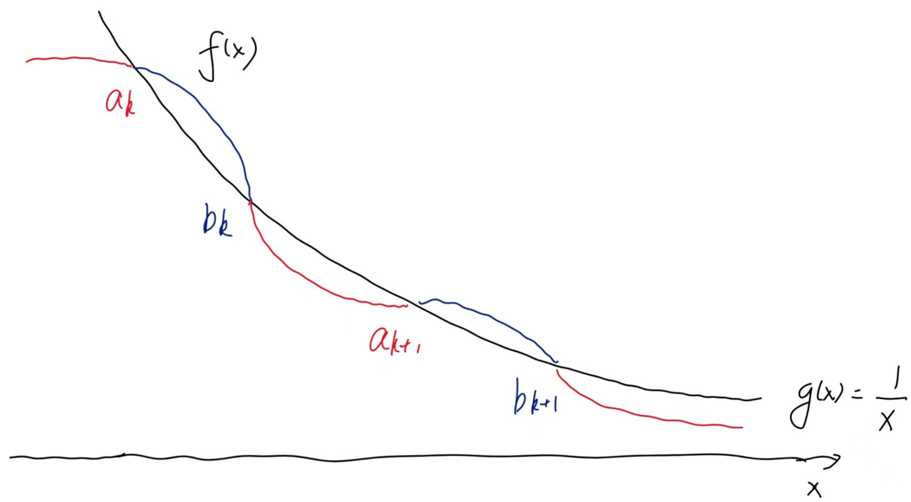
- **增零点** 给定 $x_0\in(1,+\infty)$, 若 $f(x_0)=\frac{1}{x_0}$ 且存在 $\delta>0$ 使得 $f(x)-\frac{1}{x}$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 上恒负且在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上恒正, 则称 x_0 为增零点.
- **减零点** 给定 $x_0\in(1,+\infty)$, 若 $f(x_0)=\frac{1}{x_0}$ 且存在 $\delta>0$ 使得 $f(x)-\frac{1}{x}$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 上恒正且在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上恒负, 则称 x_0 为减零点.

除了增减零点外, 也有可能出现左右均非负或非正的零点, 但这样的零点不会从本质上改变 $f(x)-\frac{1}{x}$ 在局部的符号, 故不纳入讨论的范围.

如果 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的增减零点的数量是有限的, 那么 $f(x)\geqslant\frac{1}{x}$ 或 $f(x)\leqslant\frac{1}{x}$ 会在 x 充分大时恒成立, 从而目标结论成立. 否则, 增减零点的数量是无穷个. 由于 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的增零点和减零点一定是交替出现的 (因为 $f(x)-\frac{1}{x}$ 会在增减零点处变号), 因此可以设所有的增减零点为

$$1<a_1<b_1<\cdots<a_k<b_k<a_{k+1}<b_{k+1}<\cdots,$$

其中 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为增零点, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为减零点. (如下图所示)



由于 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在每个区间 $[n, n+1]$ 上的零点有限, 故我们有 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = +\infty$. 于是

$$[a_k, +\infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \big([a_k, b_k] \cup [b_k, a_{k+1}]\big).$$

并且当 $x \in [a_k, b_k]$ 时, 有 $\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{a_k}$; 当 $x \in [b_k, a_{k+1}]$ 时, 有 $\frac{1}{a_{k+1}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

3. 用增减零点估计积分式

现在我们分别估计积分 $\int_{a_1}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{a_1}^{\infty} \min\{f(x), \frac{1}{x}\}\mathrm{d}x$. 一方面,

$$\begin{aligned}
+\infty = \int_{a_1}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{a_k}^{b_k} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x\right)\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{a_k}^{b_k} \frac{1}{a_k}\mathrm{d}x + \int_{b_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x\right)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k - a_k}{a_k} + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{b_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k - a_k}{a_k} + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{b_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x = +\infty. \tag{1}$$

另一方面, 若 $\int_{a_1}^{\infty}\min\{f(x),\frac{1}{x}\}\mathrm{d}x<+\infty$, 则有

$$\begin{aligned}+\infty &> \int_{a_1}^{\infty}\min\left\{f(x),\frac{1}{x}\right\}\mathrm{d}x\\ &=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{a_k}^{b_k}\frac{1}{x}+\int_{b_k}^{a_{k+1}}f(x)\mathrm{d}x\right)\\ &=\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{b_k}{a_k}+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{b_k}^{a_{k+1}}f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{b_k}{a_k}+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{b_k}^{a_{k+1}}f(x)\mathrm{d}x<+\infty. \tag{2}$$

4. 从积分式推导矛盾

接下来我们将从 (1)(2) 两式中推导矛盾. 在 (2) 的条件下, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{b_k}{a_k}<+\infty\Longrightarrow\lim_{k\to\infty}\log\frac{b_k}{a_k}=0\Longrightarrow\frac{b_k}{a_k}\text{ 有界.}$$

由于函数 $\frac{\log x}{x-1}$ 在 $[1,+\infty)$ 的任意有界子区间上有正的下界, 故存在常数 $c\in(0,1)$, 使得

$$\log\frac{b_k}{a_k}\geqslant c\frac{b_k-a_k}{a_k}\text{ 对任意正整数 }k\text{ 成立.}$$

因此从 (2) 可以得到

$$c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k-a_k}{a_k}+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{b_k}^{a_{k+1}}f(x)\mathrm{d}x<+\infty,$$

但这与 (1) 矛盾! 故原命题得证. ■

上面的证明虽然比较繁琐, 但是本质是这样的一种控制条件: 对任意常数 $K>0$, 存在仅依赖于 K 的常数 $c(K)$, 使得不等式

$$\log\frac{b}{a}\geqslant c(K)\frac{b-a}{a}$$

对满足 $\log\frac{b}{a}\leqslant K$ 的区间端点 $b>a$ 恒成立. 基于上面的观察, 可以推广到更一般的函数.

定理 1 (积分发散函数的比较)

设定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数 $g(x)$ 满足如下条件:

- $g(x)$ 连续, 单调递减且为严格凸函数 (即 $g''(x)>0$);
- $\int_0^\infty g(x)\mathrm{d}x=+\infty$;
- **(积分控制条件)** 对任意常数 $K>0$, 存在仅依赖于 K 的常数 $c(K)$, 使得不等式

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant c(K)(b-a)g(a)$$

  对满足 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant K$ 的区间端点 $b>a$ 恒成立.

若非负函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续单调递减, 且 $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x=+\infty$, 则

$$\int_0^\infty \min\left\{f(x),g(x)\right\}=+\infty.$$

积分控制条件的直观含义是: 只要区间 $[a,b]$ 上的积分有上界, 就可以用这个积分控制矩形的面积 $(b-a)g(a)$. 下面给出该结果的证明.

证明 和之前的证明类似, 可以假设 $f(x)$ 是分段线性函数, 且 $f(0)<g(0)$. 注意到, 对于任意一条直线 $y=kx+b$, 方程 $g(x)=kx+b$ 的零点至多有两个 (因为 $g(x)$ 严格凸), 故 $f(x)=g(x)$ 的增减零点一定是孤立点集. 进一步, 假设增减零点为无穷集, 且设所有的增减零点为

$$0<a_1<b_1<\cdots<a_k<b_k<a_{k+1}<b_{k+1}<\cdots,$$

其中 $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ 为增零点, $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ 为减零点, 且 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=+\infty$.

如果结论不成立, 即 $\int_0^\infty \min\{f(x),g(x)\}\mathrm{d}x<+\infty$, 则类似于 (1)(2) 可以得到

$$\sum_{k=1}^\infty (b_k-a_k)g(a_k)+\sum_{k=1}^\infty\int_{b_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x=+\infty, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^\infty \int_{a_k}^{b_k} g(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^\infty\int_{b_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x<+\infty. \tag{4}$$

由 (4) 可以得到 $\sum_{k=1}^\infty\int_{a_k}^{b_k} g(x)<+\infty$, 从而 $\int_{a_k}^{b_k} g(x)\mathrm{d}x$ 有一个不依赖于 k 的上界 K. 根据

积分控制条件, 存在一个常数 $c \in (0,1)$ 使得

$$\int_{a_k}^{b_k} g(x)\mathrm{d}x \geqslant c(b_k - a_k)g(a_k)$$

对所有正整数 k 成立. 因此从 (4) 出发可以得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k)g(a_k) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{b_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x < +\infty,$$

但这与 (3) 矛盾! 故原命题成立. ■

定理的简单应用

作为定理 1 的简单应用, 可以验证一些比 $\frac{1}{x}$ 衰减更快的函数满足积分控制条件. 一个简单的例子是定义在 $[2, +\infty)$ 上的函数:

$$g(x) = \frac{1}{x(\log x)^{\alpha}}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

容易计算得到

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{x(\log x)^{\alpha}}\mathrm{d}x = \frac{(\log(b/a))^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

因此 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant K$ 有上界意味着 $b/a \leqslant K'$ 对某个常数 $K' > 1$ 成立. 此时可以验证

$$\log(b/a) \geqslant c_1 \frac{b-a}{a}$$

对某个 $c_1 > 0$ 成立, 从而积分控制条件可以转化为

$$\left(\frac{b-a}{a}\right)^{1-\alpha} \geqslant \frac{c(b-a)}{a(\log a)^{\alpha}} \Longleftarrow c\left(\frac{b-a}{a}\right)^{\alpha} \leqslant (\log 2)^{\alpha} \Longleftarrow c_1(K')^{\alpha} \leqslant (\log 2)^{\alpha},$$

因此符合要求的 $c > 0$ 必然存在. 于是从定理 1 出发可得到如下推论:

推论 2 (积分发散函数的比较)

设 $\alpha \in (0,1)$. 若非负函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上连续单调递减, 且 $\int_2^\infty f(x)\mathrm{d}x = +\infty$, 则

$$\int_2^\infty \min\left\{f(x), \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\right\} = +\infty.$$

推论 2 也自然地有一个离散版本.

推论 3 (发散级数的比较)

设 $\alpha \in (0,1)$. 若非负数列 $\{a_n\}_{n=2}^\infty$ 单调递减, 且 $\sum_{n=2}^\infty a_n = +\infty$, 则

$$\sum_{n=2}^\infty \min\left\{a_n, \frac{1}{n(\log n)^\alpha}\right\} = +\infty.$$

反例的构造

是否所有的单调递减的函数 $g(x)$ 都能使得定理 1 成立? 答案是否定的, 比如 2024 年清华新生数理基础大赛的题目 **A5** 给出了反例. 一般的, 可以给出反例存在的一个充分条件:

定理 2 (积分发散函数的比较)

设定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数 $g(x)$ 满足如下条件:

- $g(x)$ 连续且单调递减;
- 存在常数 $0 \leqslant a_1 < b_1 < \cdots < a_k < b_k < \cdots$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = +\infty$ 且
$$\sum_{k=1}^\infty (b_k - a_k) g(a_k) = +\infty,$$
$$\sum_{k=1}^\infty \int_{a_k}^{b_k} g(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^\infty (a_{k+1} - b_k) g(a_{k+1}) < +\infty.$$

则存在非负函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续单调递减, 且 $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = +\infty$, 但

$$\int_0^\infty \min\{f(x), g(x)\} < +\infty.$$

证明 如果符合上述要求的 $g(x)$ 存在, 可以先构造 $[a_1,+\infty)$ 上的函数

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} g(a_k), & x\in[a_k,b_k),\\ g(a_{k+1}), & x\in[b_k,a_{k+1}), \end{cases}\qquad k=1,2,\cdots.$$

一方面, 可以验证

$$\int_{a_1}^{\infty}\tilde{f}(x)\mathrm{d}x\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_{a_k}^{b_k}\tilde{f}(x)\mathrm{d}x\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)g(a_k)=+\infty.$$

另一方面, 由于

$$\min\{\tilde{f}(x),g(x)\}=\begin{cases} g(x), & x\in[a_k,b_k),\\ g(a_{k+1}), & x\in[b,a_{k+1}), \end{cases}$$

可以得到

$$\int_{a_1}^{\infty}\min\{\tilde{f}(x),g(x)\}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{a_k}^{b_k}g(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}-b_k)g(a_{k+1})<+\infty.$$

因此 $\tilde{f}(x)$ 是符合要求的反例, 但不满足连续的条件. 为此, 只需在 b_k 的附近用连续函数对 $f(x)$ 进行 $L^1([0,+\infty))$ 意义下的近似即可. ■

最后我们来说明, 对于 $g(x)=\frac{1}{x\log x}$, 这样的反例是确实存在的.

推论 4 (积分发散函数的比较)

存在非负函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上连续单调递减, 且 $\int_2^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=+\infty$, 但

$$\int_2^{\infty}\min\left\{f(x),\frac{1}{x\log x}\right\}<+\infty.$$

证明 只需按照定理 2 的内容选择合适的 a_k,b_k 即可. 定理 2 中的两个条件等价于

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{b_k-a_k}{a_k\log a_k}=+\infty,\qquad \sum_{k=2}^{\infty}\log\frac{\log b_k}{\log a_k}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a_{k+1}-b_k}{a_{k+1}\log a_{k+1}}<+\infty. \tag{5}$$

取 $b_k=a_k(1+t_k)$, 其中 $t_k>0$ 待定. 由于对给定的 a_k,b_k, 总可以取充分大的 a_{k+1} 使得

$$\frac{a_{k+1}-b_k}{a_{k+1}\log a_{k+1}}<\frac{1}{\log a_{k+1}}<\frac{1}{k^2},$$

故只需求 t_k 使得

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t_k}{\log a_k}=+\infty,\qquad \sum_{k=2}^{\infty}\log\left(1+\frac{\log(1+t_k)}{\log a_k}\right)<+\infty,$$

或者一个更强的条件

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t_k}{\log a_k}=+\infty,\qquad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\log(1+t_k)}{\log a_k}<+\infty. \tag{6}$$

下面取 $t_k=\dfrac{\log a_k}{k\log k}$, 并定义 $A_k=\log a_k$, 则 (6) 的第一个条件成立, 而第二个条件转化为

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\log(1+\frac{A_k}{k\log k})}{A_k}<+\infty. \tag{7}$$

容易看出, 只需要在 (7) 中取 $A_k\geqslant k^2\log k$ 就可以使得

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\log(1+\frac{A_k}{k\log k})}{A_k}\leqslant\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\log(1+k)}{k^2\log k}<+\infty.$$

因此符合要求的反例存在. ■

如果将上面构造的 a_k,b_k 限制为整数, 也可以得到它的离散版本.

推论 5 (发散级数的比较)

存在单调递减的非负数列 $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$, 满足 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n=+\infty$, 但

$$\sum_{n=2}^{\infty}\min\left\{a_n,\frac{1}{n\log n}\right\}<+\infty.$$

下图作为视频的封面.

(I) 设 $\alpha \in [0,1)$. 若非负数列 $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ 单调递减, 且 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = +\infty$, 则

$$\sum_{n=2}^{\infty} \min\left\{a_n, \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}\right\} = +\infty.$$

(II) 存在单调递减的非负数列 $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$, 满足 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = +\infty$, 但

$$\sum_{n=2}^{\infty} \min\left\{a_n, \frac{1}{n\log n}\right\} < +\infty.$$