n 元复数不等式合集

虚空若叶睦

2025 年 8 月 26 日

1. 对任意正整数 n 和复数 $z_1, \cdots, z_n$, 证明:

$$\sum_{k=1}^{n}|1-z_k|+\left|1+\prod_{k=1}^{n}z_k\right| \geqslant \max\left\{2, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|z_k|\right\}.$$

月之森女子学园，有个复数不等式大家都不会证。

证不出来就没法获得 Poppin' Party 的演唱会门票，粉丝们急得像热锅蚂蚁。

请了三个中学生，两个大学生，一个博士生，通通束手无策。

最后请来了一位绿头发的少女，什么资料都没带，而且说她只会三角不等式。

她面向这个复数不等式，停在某个绝对值符号的地方，凝视半分钟。

然后——「唰！」——在此处用了一个三角不等式。

不出几行，不等式就证出来了。

户山香澄突然出现在教室里，并对绿发少女说:「谢谢你完成我的数学作业！这些门票就送给你们吧！记得来上海看哦！」随即离开了现场。

粉丝们非常开心，问绿发少女:「小睦，你想要多少报酬?」

「168 亿日元。」

粉丝们傻眼:「你才写了几行诶！怎么那么贵?」

若叶睦淡淡地说:「三角不等式，1 日元。知道在哪里放缩，16799999999 日元。」

不知道从哪冒出的一名中年男性开口了:「你的金钱观念怎么了？你才 16 岁吧？16 岁就敢要 168 亿日元，32 岁就能要 332 亿日元，64 岁要 672 亿日元，都能把 Bushiroad 买下来了。作为公司的社长，我可能得打败你。真的。」

如上所言, 这个不等式的确只用三角不等式就能证明. 先来看其中的一个结论:

$$\sum_{k=1}^{n}|1-z_k|+\left|1+\prod_{k=1}^{n}z_k\right|\geqslant 2. \tag{1}$$

$n=1$ 时, 不等式 (1) 显然成立. 假设不等式对 $n-1$ 的情形成立, 考察 n 的情形.

- 若存在下标 k 使得 $|z_k|\geqslant 1$. 不妨设 $|z_n|\geqslant 1$. 则由三角不等式可得

  $$|1-z_n|+\left|1+\prod_{k=1}^{n}z_k\right|\geqslant\left|z_n+\prod_{k=1}^{n}z_k\right|\geqslant\left|1+\prod_{k=1}^{n-1}z_k\right|,$$

  因此为证明不等式 (1), 只需验证

  $$\sum_{k=1}^{n-1}|1-z_k|+\left|1+\prod_{k=1}^{n-1}z_k\right|\geqslant 2,$$

  而上式由归纳假设即知成立. 故 (1) 得证.

- 若对所有下标 k 都有 $|z_k|\leqslant 1$, 则由三角不等式可得

  $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|1-z_k|+\left|1+\prod_{k=1}^{n}z_k\right|&\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}|1-z_k|+\left|2-z_n+\prod_{k=1}^{n}z_k\right|\\&\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}|1-z_k|+2-\left|z_n\left(1-\prod_{k=1}^{n-1}z_k\right)\right|\\&\geqslant 2+\sum_{k=1}^{n-1}|1-z_k|-\left|1-\prod_{k=1}^{n-1}z_k\right|.\end{aligned}$$

  接下来只需证明: 对任何满足模长不超过 1 的复数 $z_1,\cdots,z_{n-1}$, 有不等式

  $$\sum_{k=1}^{n-1}|1-z_k|\geqslant\left|1-\prod_{k=1}^{n-1}z_k\right|. \tag{2}$$

  事实上, 利用三角不等式可以直接得到

  $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}|1-z_k|&\geqslant|1-z_1|+|z_1-z_1z_2|+|z_1z_2-z_1z_2z_3|+|z_1\cdots z_{n-2}-z_1\cdots z_{n-2}z_{n-1}|\\&\geqslant|1-z_1\cdots z_{n-1}|=\left|1-\prod_{k=1}^{n-1}z_k\right|.\end{aligned}$$

  从而 (2) 成立. 故不等式 (1) 得证.

综上可知, 不等式 (1) 对任何复数 $z_1, \cdots, z_n$ 都成立. 不等式的另一边可以强化为:

$$\sum_{k=1}^{n} |1 - z_k| + \left|1 + \prod_{k=1}^{n} z_k\right| \geqslant |z_1| + \prod_{k=2}^{n} \min\{|z_k|, 1\}. \tag{3}$$

当 $n = 1$ 时, (3) 显然成立. 当 $n = 2$ 时, 可以证明, 对任意复数 z_1, z_2, 有

$$|1 - z_1| + |1 - z_2| + |1 + z_1 z_2| \geqslant |z_1| + |z_2|. \tag{4}$$

直接利用三角不等式可得:

$$\begin{aligned} |1 - z_1| + |1 - z_2| + |1 + z_1 z_2| &= |1 - z_1| + |1 - \bar{z}_2| + |1 + z_1 z_2| \\ &\geqslant |z_1 - \bar{z}_2| + |1 + z_1 z_2| \\ &\geqslant \sqrt{|z_1 - \bar{z}_2|^2 + |1 + z_1 z_2|^2} \\ &= \sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)} \\ &\geqslant |z_1| + |z_2|. \end{aligned}$$

于是 (4) 成立. 为了证明一般的情形, 对 n 使用数学归纳法. 假设 (3) 对 $n - 1$ 的情形成立, 考察 n 的情形. 分类讨论如下情况:

- 若存在下标 $k \in \{2, \cdots, n\}$ 使得 $|z_k| \leqslant 1$, 不妨设 $k = 2$. 于是

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |1 - z_k| + \left|1 + \prod_{k=1}^{n} z_k\right| &\geqslant |1 - z_1| + |1 - z_2| + |z_2(1 - z_3)| + \sum_{k=4}^{n} |1 - z_k| + \left|1 + \prod_{k=1}^{n} z_k\right| \\ &\geqslant |1 - z_1| + |1 - z_2 z_3| + \sum_{k=4}^{n} |1 - z_k| + \left|1 + \prod_{k=1}^{n} z_k\right| \\ &\geqslant |z_1| + \min\{|z_2 z_3|, 1\} \prod_{k=4}^{n} \min\{|z_k|, 1\} \qquad \text{(归纳假设)} \\ &\geqslant |z_1| + \min\{|z_2|, 1\} \min\{|z_3|, 1\} \prod_{k=4}^{n} \min\{|z_k|, 1\}. \end{aligned}$$

  于是不等式 (3) 成立.

- 若对所有下标 $k \in \{2, \cdots, n\}$ 都有 $|z_k| > 1$, 则不等式 (3) 转化为

$$\sum_{k=1}^{n} |1 - z_k| + \left|1 + \prod_{k=1}^{n} z_k\right| \geqslant |z_1| + 1. \tag{5}$$

利用三角不等式可以得到

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}|1-z_k|+\left|1+\prod_{k=1}^{n}z_k\right| &\geqslant \prod_{k=1}^{n-1}|1-z_k|+\left|z_n+\prod_{k=1}^{n}z_k\right| \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n-1}|1-z_k|+\left|1+\prod_{k=1}^{n-1}z_k\right| && (|z_n|\geqslant 1) \\
&\geqslant |z_1|+\prod_{k=2}^{n-1}\min\{|z_k|,1\} && (\text{归纳假设}) \\
&= |z_1|+1.
\end{aligned}
$$

于是 (5) 成立, 不等式 (3) 得证.

我们实际上得到了一个更强的不等式:

$$
\sum_{k=1}^{n}|1-z_k|+\left|1+\prod_{k=1}^{n}z_k\right| \geqslant \max\left\{2,\max_{1\leqslant k\leqslant n}|z_k|+T\right\},
$$

其中 $T=\prod_{k=1}^{n}\min\{|z_k|,1\}$.

2. 给定正整数 n. 设 $P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 是 n 次复系数多项式, 且 $a_0\in\mathbb{R}$. 若 $|\operatorname{Re}P(z)|\leqslant 1$ 对任意 $|z|\leqslant 1$ 成立, 证明:

$$|\operatorname{Im}P(z)|<\frac{2}{\pi}(\log n+2)\ \text{对任意}\ |z|\leqslant 1\ \text{成立}.$$

本题的难度非常之大, 有国家集训队选拔的难度. 这里, $a_0\in\mathbb{R}$ 的条件是关键的, 否则可以取 $P(z)=Ai$, 其中 $A>0$ 是充分大的实数, 此时 $\operatorname{Im}P(z)$ 无上界. 在解决该问题前, 我们先介绍一些复变函数理论和三角多项式插值.

I 基础知识: 复变函数理论和三角多项式插值

最大模原理 设 $f(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数, 则 $\operatorname{Re}f(z)$ 和 $\operatorname{Im}f(z)$ 都是调和函数. 调和函数在有界闭区域 D 上的最大模一定在边界 ∂D 上取到. 特别地, $\operatorname{Re}f(z)$ 和 $\operatorname{Im}f(z)$ 在单位圆盘内的最大模一定在单位圆上取到:

$$\max_{|z|\leqslant 1}|\operatorname{Re}f(z)|=\max_{|z|=1}|\operatorname{Re}f(z)|,\qquad \max_{|z|\leqslant 1}|\operatorname{Im}f(z)|=\max_{|z|=1}|\operatorname{Im}f(z)|.$$

Schwarz 积分公式 设 $f(z)$ 是闭单位圆盘上的全纯函数, 则对任意 $|z|<1$ 有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}f(e^{i\phi})\frac{e^{i\phi}+z}{e^{i\phi}-z}\mathrm{d}\phi+i\operatorname{Im}f(0).$$

Schwarz 公式说明了 $f(z)$ 在圆盘内部的函数值可以被单位圆上的函数值的实部确定. Schwarz 公式可以看作调和函数的 Poisson 积分公式的复数版本的推广.

三角多项式插值 称函数 $f(\phi):[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ 为 n 次三角多项式, 如果

$$f(\phi)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}\big(a_k\cos(k\phi)+b_k\sin(k\phi)\big),$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ 为实数. 由于 $f(\phi)$ 由 $2n+1$ 个线性无关的函数组成, 因此 $f(\phi)$ 的插值至少需要 $2n+1$ 个节点. 但是由于区间的对称性, 一个更方便的选择是在 $[0,2\pi]$ 上均匀地选取 $2n+2$ 个节点:

$$\phi_j=\frac{j\pi}{n+1},\qquad j=0,1,\cdots,2n+1.$$

令 $L_j(\phi)$ 是 ϕ_j 处的插值基函数, 则 $L_j(\phi)$ 应满足如下条件:

- $L_j(\phi)$ 是 $n+1$ 次三角多项式;
- $L_j(\phi_i) = \delta_{ij}$, 其中 $i = 0, 1, \cdots, 2n+1$.

这样的基函数 $L_j(\phi)$ 有一个简单的显式表达式 (有点像 Dirichlet 核, 但是分母不一样):

$$L_j(\phi) = \frac{\sin((n+1)(\phi - \phi_j))}{(2n+2)\tan(\frac{\phi-\phi_j}{2})}, \qquad j = 0, 1, \cdots, 2n+1. \tag{1}$$

容易看出, 所有的 $L_j(\phi) = L_0(\phi - \phi_j)$ 都可以从 $L_0(\phi)$ 平移得到. 由数学归纳法可以证明:

$$(2n+2)L_0(\phi) = \frac{\sin((n+1)\phi)}{\tan\frac{\phi}{2}} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(k\phi) + \cos((n+1)\phi),$$

因此 $L_0(\phi)$ 的确是 $n+1$ 次三角多项式. 于是, 每个 n 次三角多项式 $f(\phi)$ 都可以表示为

$$f(\phi) = \sum_{j=0}^{2n+1} c_j L_0(\phi - \phi_j), \tag{2}$$

其中 $\{c_j\}_{j=0}^{2n+1}$ 为插值系数. 由于选取的节点个数比 $f(\phi)$ 的自由度多一个, 表达式 (2) 中的 $\{c_j\}_{j=0}^{2n+1}$ 并不是线性无关的. 比较 (2) 的两侧的 Fourier 级数中 $\cos((n+1)\phi)$ 的系数, 有

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=0}^{2n+1} c_j \int_0^{2\pi} L_0(\phi - \phi_j)\cos((n+1)\phi)\mathrm{d}\phi \\
&= \sum_{j=0}^{2n+1} c_j \int_0^{2\pi} L_0(\phi)\cos\big((n+1)\phi + (n+1)\phi_j\big)\mathrm{d}\phi \\
&= \sum_{j=0}^{2n+1} c_j \int_0^{2\pi} L_0(\phi)\cos\big((n+1)\phi + j\pi\big)\mathrm{d}\phi \\
&= \sum_{j=0}^{2n+1} (-1)^j c_j \int_0^{2\pi} L_0(\phi)\cos((n+1)\phi)\mathrm{d}\phi.
\end{aligned}$$

因此, (2) 中的插值系数需要满足额外的线性约束

$$\sum_{j=0}^{2n+1} (-1)^j c_j = 0. \tag{3}$$

如果在 (2) 中比较 $\sin((n+1)\phi)$ 的系数, 所得到的线性约束也是 (3). 以上结果可总结如下:

定理 任意次数为 n 的三角多项式 $f(\phi)$ 都可以唯一表示为

$$f(\phi) = \sum_{j=0}^{2n+1} c_j L_0(\phi - \phi_j),$$

其中插值基函数 $L_0(\phi)$ 由 (1) 给出, 且插值系数 $\{c_j\}_{j=0}$ 满足额外的线性约束

$$\sum_{j=0}^{2n+1} (-1)^j c_j = 0.$$

II 原问题的等价转化

我们首先利用全纯函数的性质对原问题作一些等价转化. 由于 $\operatorname{Im} P(z)$ 是调和函数, 所以 $|\operatorname{Im} P(z)|$ 在 $|z| \leqslant 1$ 中的最大值一定在 $|z| = 1$ 时取到. 根据旋转对称性, 只需证明:

$$|\operatorname{Im} P(1)| < \frac{2}{\pi}(\log n + 2) \tag{4}$$

成立. 如果 (4) 成立, 则对给定的 n 次多项式 $P(z)$ 和 $\theta \in [0, 2\pi]$, 可定义

$$\tilde{P}(z) = P(e^{i\theta} z).$$

于是 $\tilde{P}(z)$ 仍然为 n 次复数多项式, $\tilde{P}(0) \in \mathbb{R}$, 且 $P(z)$ 和 $\tilde{P}(z)$ 的值域完全相同. 由 (4) 可得

$$|\operatorname{Im} \tilde{P}(1)| = |\operatorname{Im} P(e^{i\theta})| < \frac{2}{\pi}(\log n + 2).$$

由于 $\theta \in [0, 2\pi]$ 是任意的, 故在上式中对 θ 取最大值可得到

$$\max_{|z| \leqslant 1} |\operatorname{Im} P(z)| = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |\operatorname{Im} P(e^{i\theta})| < \frac{2}{\pi}(\log n + 2),$$

从而原命题成立. 接下来我们估计 $\operatorname{Im} P(1)$. 根据 Schwarz 积分公式 (注意 $P(0) \in \mathbb{R}$),

$$P(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(P(e^{i\phi})\right) \frac{e^{i\phi} + z}{e^{i\phi} - z} \mathrm{d}\phi \tag{5}$$

对于 $|z| < 1$ 恒成立. 在 (5) 中令 $z \to 1$, 可以得到一个类似于 Hilbert 变换的结果:

$$P(1) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{P.V.} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(P(e^{i\phi})\right) \frac{e^{i\phi} + 1}{e^{i\phi} - 1} \mathrm{d}\phi, \tag{6}$$

其中 P.V. 表示积分主值, 因为上述积分在 $\phi=0$ 和 $\phi=2\pi$ 处奇异. 令 $U(\phi)=\mathrm{Re}\,(P(e^{i\phi}))$, 则 $U(\phi)$ 是 n 次三角多项式. 在 (6) 的两端取虚部, 可以得到

$$\mathrm{Im}\,P(1)=-\frac{1}{2\pi}\mathrm{P.V.}\int_0^{2\pi}U(\phi)\cot\left(\frac{\phi}{2}\right)\mathrm{d}\phi. \tag{7}$$

根据之前对于三角多项式插值的讨论, $U(\phi)$ 可以表示为

$$U(\phi)=\sum_{j=0}^{2n+1}c_jL_0(\phi-\phi_j), \tag{8}$$

其中 $\phi_j=\dfrac{j\pi}{n+1}$ 为插值节点, $L_0(\phi)$ 为 (1) 中的插值基函数. 由于 $|U(\phi)|\leqslant 1$ 对 $\phi\in[0,2\pi]$ 成立, 有

$$|c_j|=|U(\phi_j)|\leqslant 1,\qquad j=0,1,\cdots,2n+1.$$

由 (7)(8) 可以得到

$$\mathrm{Im}\,P(1)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{2n+1}c_j\cdot\mathrm{P.V.}\int_0^{2\pi}L_0(\phi-\phi_j)\cot\left(\frac{\phi}{2}\right)\mathrm{d}\phi. \tag{9}$$

为方便起见, 定义 w_j 为基函数 $L_0(\phi-\phi_j)$ 的积分值, 即

$$\begin{aligned} w_j&=(2n+2)\mathrm{P.V.}\int_0^{2\pi}L_0(\phi-\phi_j)\cot\left(\frac{\phi}{2}\right)\mathrm{d}\phi\\ &=\mathrm{P.V.}\int_0^{2\pi}\frac{\sin((n+1)\phi)}{\tan\frac{\phi}{2}}\cot\left(\frac{\phi+\phi_j}{2}\right)\mathrm{d}\phi. \end{aligned} \tag{10}$$

则从 (9) 可以得到

$$|\mathrm{Im}\,P(1)|\leqslant\frac{1}{4\pi(n+1)}\sum_{j=0}^{2n+1}|c_j||w_j|\leqslant\frac{1}{4\pi(n+1)}\sum_{j=0}^{2n+1}|w_j|. \tag{11}$$

接下来的任务是计算每一项 w_j 的具体值.

III 计算基函数的积分 w_j

在正式计算前, 先证明一个有用的引理, 它是 Schwarz 积分公式的一个直接应用.

引理 对任何非负整数 k, 有

$$\mathrm{P.V.}\int_0^{2\pi}\cos(k\phi)\cot\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\mathrm{d}\phi=2\pi\sin(k\theta). \tag{12}$$

证明 左侧的积分等于

$$-\text{P.V.}\int_0^{2\pi}\cos(k(\theta+\phi))\cot\left(\frac{\phi}{2}\right)\mathrm{d}\phi,$$

在等式 (7) 中取多项式 $P(z)=e^{ik\theta}z^k$ 即知 (12) 成立. ■

回到原题. 根据 (10) 中 w_j 的表达式, 再利用

$$\frac{\sin((n+1)\phi)}{\tan\frac{\phi}{2}}=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(k\phi)+\cos((n+1)\phi),$$

可以化简得到:

$$\begin{aligned}
w_j&=\text{P.V.}\int_0^{2\pi}\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(k\phi)+\cos((n+1)\phi)\right)\cot\left(\frac{\phi+\phi_j}{2}\right)\mathrm{d}\phi\\
&=4\pi\sum_{k=1}^{n}\sin(k\phi_j)+2\pi\sin((n+1)\phi_j)=4\pi\sum_{k=1}^{n}\sin(k\phi_j)\\
&=2\pi\frac{\cos\frac{\phi_j}{2}-\cos((n+\frac{1}{2})\phi_j)}{\sin\frac{\phi_j}{2}}=2\pi\frac{(1-(-1)^j)\cos\frac{\phi_j}{2}}{\sin\frac{\phi_j}{2}}\\
&=2\pi(1-(-1)^j)\cot\left(\frac{j\pi}{2n+2}\right).
\end{aligned}\tag{12}$$

将 (12) 的表达式代入 (11) 可以得到

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Im}P(1)|&\leqslant\frac{1}{2\pi(n+1)}\sum_{j=1}^{n}w_j=\frac{1}{\pi(n+1)}\sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]}w_{2k-1}\\
&=\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]}\cot\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n+2}\right)\\
&<\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]}\frac{2n+2}{(2k-1)\pi} && (\text{利用 }\cot x<x^{-1})\\
&=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]}\frac{1}{2k-1}\leqslant\frac{4}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}\log n\right)=\frac{2}{\pi}(\log n+2).
\end{aligned}$$

故原命题得证.

3. 设实数 $a_1,\cdots,a_n$ 满足 $\sum_{k=1}^{n} a_k^2=1$. 对任意复数 $z_1,\cdots,z_n$, 证明:

$$\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2+\left|\sum_{k=1}^{n}z_k^2\right|\geqslant 2\left|\sum_{k=1}^{n}a_kz_k\right|^2.$$

本题是 2025 年全国高中数学联赛四川预赛试题的推广. 由于 z_k 是复数, 本题并不能直接应用 Cauchy 不等式. 这让我想起了 2014 年的中国数学奥林匹克第一题: 若复数 $z_1,\cdots,z_n$ 满足 $|z_k-1|\leqslant r$, 且 $r\in(0,1)$, 则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k}\right|\geqslant n^2(1-r^2).$$

证明 设 $z_k=x_k+iy_k$, $k=1,\cdots,n$, 则

$$\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2=\sum_{k=1}^{n}(x_k^2+y_k^2),\quad \sum_{k=1}^{n}z_k^2=\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-y_k^2)+2i\sum_{k=1}^{n}x_ky_k,\quad \sum_{k=1}^{n}a_kz_k=\sum_{k=1}^{n}a_k(x_k+iy_k).$$

于是原不等式等价于

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k^2+y_k^2)+\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-y_k^2)\right)^2+4\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^2}\geqslant 2\left(\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right)^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}a_ky_k\right)^2.$$

可以观察到这是一个关于 x,y 完全对称的不等式. 定义向量

$$\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n),\qquad \boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n),\qquad \boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n),$$

则不等式可以等价写为

$$|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2+\sqrt{(|\boldsymbol{x}|^2-|\boldsymbol{y}|^2)^2+4(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2}\geqslant 2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y})^2. \tag{1}$$

下面证明: 不等式 (1) 对所有满足 $|\boldsymbol{a}|\leqslant 1$ 的向量 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ 成立.

这里, 可以不妨设 $\boldsymbol{a}$ 恰好位于 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 张成的平面中, 否则只需将 $\boldsymbol{a}$ 替换为 $\boldsymbol{a}$ 在该平面上的投影. 于是, 通过适当地选取坐标系, 可不妨设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 都位于 $\mathbb{R}^2$ 中. 更进一步, 通过旋转变换可以假设

$$\boldsymbol{a}=(1,0),\qquad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2),\qquad \boldsymbol{y}=(y_1,y_2),$$

从而不等式 (1) 可以等价地写为

$$\sqrt{(x_1^2+x_2^2-y_1^2-y_2^2)^2+4(x_1y_1+x_2y_2)^2} \geqslant x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2. \tag{2}$$

两边平方后, 可以将不等式 (2) 转化为

$$(x_1^2-y_2^2)(x_2^2-y_1^2)+(x_1y_1+x_2y_2)^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow (x_1x_2+y_1y_2)^2 \geqslant 0.$$

因此不等式 (2) 成立, 原命题得证. ■

4. 对任意正整数 $n \geqslant 3$ 和两两互异的复数 $z_1, \cdots, z_n$, 证明:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{z_k}{z_k - z_{k+1}}\right|^2 \geqslant 1,$$

其中 $z_{n+1} = z_1$.

右边的下界 1 对所有正整数 $n \geqslant 3$ 都是紧的. 取 $z_k = A^k$, 其中 $A > 0$ 是一个实数. 则

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{z_k}{z_k - z_{k+1}}\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{A^k}{A^{k+1} - A^k} + 1 = \frac{n-1}{A-1} + 1.$$

因此取 A 充分大即可使右端的下确界为 1.

证明 考察复数值函数

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{t + z_k}{z_k - z_{k+1}}\right|^2.$$

接下来求 $f(t)$ 的最小值. 注意到, $f(t)$ 可以等价地写为

$$f(t) = A|t|^2 + \bar{B}t + B\bar{t} + C,$$

其中系数 A, B, C 的值为

$$A = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|z_k - z_{k+1}|^2}, \quad B = \sum_{k=1}^{n}\frac{z_k}{|z_k - z_{k+1}|^2}, \quad C = \sum_{k=1}^{n}\frac{|z_k|^2}{|z_k - z_{k+1}|^2}.$$

此时, $f(t)$ 的最小值在 $t_0 = -B/A$ 处取到, 即

$$f(t) \geqslant f(t_0) = \frac{AC - |B|^2}{A}.$$

于是接下来只需证明:

$$AC - |B|^2 \geqslant A. \tag{1}$$

注意, Lagrange 恒等式的复数形式为

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|u_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|v_k|^2\right) - \left|\sum_{k=1}^{n}u_k\bar{v}_k\right|^2 = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}|u_jv_k - u_kv_j|^2,$$

在上式中取 $u_k = \dfrac{z_k}{|z_k - z_{k+1}|}$ 和 $v_k = \dfrac{1}{|z_k - z_{k+1}|}$, 可以得到

$$
\begin{aligned}
AC - |B|^2 &= \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{|z_j - z_k|^2}{|z_j - z_{j+1}|^2 |z_k - z_{k+1}|^2} \\
&\geqslant \frac{|z_n - z_1|^2}{|z_n - z_1|^2 ||z_1 - z_2|^2} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|z_j - z_{j+1}|^2}{|z_j - z_{j+1}|^2 |z_{j+1} - z_{j+2}|^2} \\
&= \frac{1}{|z_1 - z_2|^2} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|z_{j+1} - z_{j+2}|^2} = A.
\end{aligned}
$$

因此不等式 (1) 得证. 并且, (1) 在 $n = 3$ 时为恒等式, 在 $n \geqslant 4$ 时不能取等. ■

5. 设复数 a, b, c 满足

$$|a+b+c| = |ab+bc+ca| = |abc| = 1,$$

证明: $|a| \leqslant 3|b|$.

本题的其它解答也可以在 BV11weEzYESC 和 ForeverHaibara(豪神) 的知乎回答上找到. 特别的, ForeverHaibara 给出了问题的一个强化版本: 若 $|abc| = 1$, 则

$$9|b|^2 - |a|^2 + \frac{3}{2}(|ab+bc+ca|^2 - 1) + \frac{1}{2}|a|^2(|a+b+c|^2 - 1) \geqslant 0.$$

本文档中的解答是由茶话会的群友暖 igf 给出. 取等条件是 $a = 1 + \sqrt{2}i$, $b = \frac{1-\sqrt{2}i}{3}$, $c = -1$.

证明 不妨设 $abc = -1$, 则 $c = -\frac{1}{ab}$. 于是条件可化简为

$$\left|a + b - \frac{1}{ab}\right| = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - ab\right| = 1. \tag{1}$$

下面取复数 s, t 使得 $a = st$, $b = \frac{s}{t}$, 则条件 (1) 可改写为

$$\left|s\left(t + \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{s^2}\right| = \left|\frac{1}{s}\left(t + \frac{1}{t}\right) - s^2\right| = 1. \tag{2}$$

在 (2) 的条件下, 我们的证明目标是 $|t| \leqslant \sqrt{3}$. 令复数 $z = t + \frac{1}{t}$. 根据对称性, 可不妨假设 $\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$, 因为对任何满足 (2) 的复数 (s, t), 有 $(-s, -t)$ 也满足 (2). 于是我们得到

$$\operatorname{Re}(z) \geqslant 0, \qquad \left|z - \frac{1}{s^3}\right| = \frac{1}{|s|}, \qquad |z - s^3| = |s|. \tag{3}$$

进一步, 将 (3) 中的等式平方后得到

$$\begin{cases} \left(z - \dfrac{1}{s^3}\right)\left(\bar{z} - \dfrac{1}{\bar{s}^3}\right) = \dfrac{1}{|s|^2} \\ \left(z - s^3\right)\left(\bar{z} - \bar{s}^3\right) = |s|^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |s|^6 z\bar{z} - s^3 z - \bar{s}^3 \bar{z} + 1 = |s|^4 \\ z\bar{z} - \bar{s}^3 z - s^3 \bar{z} + |s|^6 = |s|^2 \end{cases}$$

将上面的两个不等式相加, 即有

$$(|s|^6 + 1)z\bar{z} - (s^3 + \bar{s}^3)(z + \bar{z}) + \left(|s|^6 - |s|^4 - |s|^2 + 1\right) = 0. \tag{4}$$

基于等式 (4) 和条件 $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \geqslant 0$, 我们来证明 $|z - 1| \leqslant 1$. 如若不然, 有

$$|z - 1| > 1 \Longrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) > 1 \Longrightarrow z\bar{z} > z + \bar{z}.$$

因此由 (4) 可以得到

$$\begin{aligned}0 &= (|s|^6+1)z\bar{z} - (s^3+\bar{s}^3)(z+\bar{z}) + \big(|s|^6-|s|^4-|s|^2+1\big)\\ &> (|s|^6-s^3-\bar{s}^3+1)(z+\bar{z}) + \big(|s|^6-|s|^4-|s|^2+1\big)\\ &\geqslant (|s|^3-1)^2(z+\bar{z}) + (|s|^2-1)^2(|s|^2+1),\end{aligned}$$

矛盾! 故由 (4) 一定可以得到 $|z-1|\leqslant 1$, 即

$$\left|t+\frac{1}{t}-1\right|\leqslant 1. \tag{5}$$

下面我们从 (5) 出发证明 $|t|\leqslant\sqrt{3}$. 事实上, 设 $t=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, 则 (5) 两边平方后可得

$$\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)+2\cos 2\theta-2r\cos\theta-\frac{2\cos\theta}{r}\leqslant 0,$$

再利用二倍角公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta-1$ 即有

$$4\cos^2\theta-2\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+\left(r-\frac{1}{r}\right)^2\leqslant 0. \tag{6}$$

不等式 (6) 的左边是一个关于 $\cos\theta$ 的一个开口向上的二次函数, 故其判别式 $\Delta\geqslant 0$, 即

$$\Delta = 4\left(r+\frac{1}{r}\right)^2-16\left(r-\frac{1}{r}\right)^2\geqslant 0 \Longrightarrow 3r^4-10r^2+3\leqslant 0 \Longrightarrow \frac{1}{3}\leqslant r^2\leqslant 3,$$

故 $|t|^2\leqslant 3$. 原不等式得证. ■