一个数列的收敛和发散性证明

虚空若叶睦

2025 年 8 月 19 日

(1) 设非负数列 $\{a_n\}_{n=3}^{\infty}$ 满足 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} a_n^{1-\frac{1}{\ln n}}$ 收敛.

(2) 设非负数列 $\{a_n\}_{n=3}^{\infty}$ 满足 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ 发散, 证明 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} a_n^{1+\frac{1}{\ln n}}$ 发散.

这是我最近在 QQ 群和 PiKaChu345 的新视频 BV1LYYxzaE7H 中看到的问题. 本文档给出了一个简单的解法, 以及一个反方向的推广.

证明 (1) 令 $b_n = \max\left(a_n, \frac{1}{n^2}\right)$, 则 $b_n \geqslant a_n$ 且 $\sum_{n=3}^{\infty} b_n$ 收敛. 下面只需证明:

$$\sum_{n=3}^{\infty} b_n^{1-\frac{1}{\ln n}} < +\infty. \tag{$*$}$$

注意到, $b_n \geqslant \frac{1}{n^2}$ 意味着

$$b_n^{-\frac{1}{\ln n}} \leqslant \left(\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{\ln n}} = n^{\frac{2}{\ln n}} = e^2,$$

故

$$\sum_{n=3}^{\infty} b_n^{1-\frac{1}{\ln n}} \leqslant e^2 \sum_{n=3}^{\infty} b_n < +\infty,$$

故 $(*)$ 得证, 原命题得证.

(2) 令 $I = \left\{n \geqslant 3 : a_n \leqslant \frac{1}{n^2}\right\}$, $J = \left\{n \geqslant 3 : a_n > \frac{1}{n^2}\right\}$, 则

$$+\infty = \sum_{n=3}^{\infty} a_n = \sum_{n\in I} a_n + \sum_{n\in J} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n\in J} a_n \Longrightarrow \sum_{n\in J} a_n = +\infty.$$

接下来, 只需证明

$$\sum_{n\in J} a_n^{1+\frac{1}{\ln n}} = +\infty. \tag{$**$}$$

事实上, 当 $n \in J$ 时, $a_n \geqslant \frac{1}{n^2}$ 意味着

$$a_n^{\frac{1}{\ln n}} \geqslant \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\ln n}} = \frac{1}{e^2},$$

从而

$$\sum_{n\in J} a_n^{1+\frac{1}{\ln n}} \geqslant \frac{1}{e^2}\sum_{n\in J} a_n = +\infty,$$

故 (2) 得证, 原命题得证. ■

上面的结果也容易推广到连续情形:

(1) 设非负 Lebesgue 可测函数 f 满足 $\int_3^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 证明 $\int_3^\infty f^{1-\frac{1}{\ln x}}(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 设非负 Lebesgue 可测函数 f 满足 $\int_3^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 发散, 证明 $\int_3^\infty f^{1+\frac{1}{\ln x}}(x)\mathrm{d}x$ 发散.