

Fibonacci 数列的数论性质

虚空若叶睦

2025 年 8 月 5 日

Fibonacci 数列的定义为: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. 它的通项公式是:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

Fibonacci 数列有一些优美的性质, 例如:

- $\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m, n)}$ (利用辗转相除法)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + F_{2n-1}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (观看 Michael Penn 的视频 A nice Fibonacci reciprocal sum!)

本文档主要介绍 Fibonacci 数列素数整除性的相关结果.

设 F_n 是 Fibonacci 数列, 满足 $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. 若 p 是奇素数, 则

$$F_p \equiv \left(\frac{5}{p} \right) \pmod{p}, \quad F_{p - \left(\frac{5}{p} \right)} \equiv 0 \pmod{p}, \quad \sum_{n=1}^{p-1} \frac{F_n}{n} \equiv 0 \pmod{p},$$

其中 $\left(\frac{a}{p} \right)$ 为 Legendre 符号.

前两个性质是 Fibonacci 数列的经典结果, 而第三个性质实际上是 2025 年全国高中数学联赛四川赛区的预赛题目. 我们将依次给出这些结果的证明.

前两条性质的证明

当 $p = 5$ 时, $F_5 = 5$, 结论成立. 下面分别讨论 $\left(\frac{5}{p} \right) = \pm 1$ 的情形.

- 若 $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$, 则 5 是模 p 的二次剩余, 从而 $a = \sqrt{5}$ 是模 p 的剩余类中的元素.
由于 $a \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$, 故根据 Fermat 小定理可以得到

$$\left(\frac{1+a}{2}\right)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad \left(\frac{1-a}{2}\right)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

于是 Fibonacci 数列的项 F_p 和 F_{p-1} 满足

$$F_p \equiv \frac{1}{a} \left[\left(\frac{1+a}{2}\right)^p - \left(\frac{1-a}{2}\right)^p \right] \equiv \frac{1}{a} \left(\frac{1+a}{2} - \frac{1-a}{2} \right) \equiv 1 \pmod{p},$$

$$F_{p-1} \equiv \frac{1}{a} \left[\left(\frac{1+a}{2}\right)^{p-1} - \left(\frac{1-a}{2}\right)^{p-1} \right] \equiv 0 \pmod{p},$$

从而结论成立.

- 若 $\left(\frac{5}{p}\right) = -1$, 则 5 不是模 p 的二次剩余. 下面定义模 p 的剩余类 $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ 的扩张

$$\mathbb{F}_{p^2} = \mathbb{Z}_p(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}_p\}.$$

并且, $\mathbb{F}_{p^2}$ 中的元素模 p 的余数为 0 当且仅当 $a = b = 0$. 由于组合数 C_p^k 在 $1 \leq k \leq p-1$ 时被素数 p 整除, 故由二项式定理可得

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p \equiv \frac{1+5^{\frac{p}{2}}}{2^p} \pmod{p}.$$

根据 Euler 判别准则, 从 $\left(\frac{5}{p}\right) = -1$ 可得 $5^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$. 因此从上式可以得到

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p \equiv \frac{1-\sqrt{5}}{2} \pmod{p}, \quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p \equiv \frac{1+\sqrt{5}}{2} \pmod{p}.$$

于是 Fibonacci 数列的项 F_p 和 F_{p+1} 满足

$$F_p = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p \right] \equiv \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \equiv -1 \pmod{p},$$

$$F_{p+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{p+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{p+1} \right] \equiv 0 \pmod{p}.$$

从而结论成立.

第三条性质

一般地, 我们来证明对任何正整数 a 和奇素数 p , 有

$$\sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n\sqrt{a}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{a}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{a}}{2} \right)^n \right] \equiv 0 \pmod{p}. \quad (1)$$

由二项式定理,

$$\frac{1}{n\sqrt{a}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{a}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{a}}{2} \right)^n \right] = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{p-3}{2}} a^k \frac{C_n^{2k+1}}{n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{p-3}{2}} a^k \frac{C_{n-1}^{2k}}{2k+1}.$$

因此 (1) 可以等价写为

$$\sum_{n=1}^{p-1} \sum_{k=0}^{\frac{p-3}{2}} \frac{a^k}{2^n} \frac{C_{n-1}^{2k}}{2k+1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

因此只需证明: 当 $k = 0, 1, \dots, \frac{p-3}{2}$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{p-2} \frac{1}{2^n} C_n^{2k} \equiv 0 \pmod{p}. \quad (2)$$

直接计算可得

$$\sum_{n=0}^{p-2} \frac{1}{2^n} C_n^{2k} = \mathfrak{Cof}_{2k} \left[\sum_{n=0}^{p-2} \frac{1}{2^n} (x+1)^n \right] = \mathfrak{Cof}_{2k} \left[\frac{\left(\frac{x+1}{2} \right)^{p-1} - 1}{\frac{x-1}{2}} \right]$$

因此只需证明: 当 $k = 0, 1, \dots, \frac{p-3}{2}$ 时,

$$\mathfrak{Cof}_{2k} \left[\frac{(x+1)^{p-1} - 2^{p-1}}{x-1} \right] \equiv 0 \pmod{p}. \quad (3)$$

由于 p 是奇素数, 所以根据 Fermat 小定理, (3) 实际上等价于

$$\mathfrak{Cof}_{2k} \left[\frac{(1+x)^{p-1} - 1}{1-x} \right] \equiv 0 \pmod{p}. \quad (4)$$

换言之, 只需证明 (4) 中的形式幂级数的偶数次系数都是 p 的倍数. 这等价于

$$\frac{(1+x)^{p-1} - 1}{1-x} + \frac{(1-x)^{p-1} - 1}{1+x} \equiv 0 \pmod{p}$$

即

$$\frac{(1+x)^p + (1-x)^p - 2}{1-x^2} \equiv 0 \pmod{p}. \quad (5)$$

注意到 C_p^k 在 $k = 1, \dots, p-1$ 时均为 p 的倍数, (5) 成立. 故命题得证.