图中的不等式

虚空若叶睦

2025 年 8 月 20 日

> 设图 $G=(V,E)$ 是 n 阶简单图, 其顶点集为 $\{1,\cdots,n\}$, 且最大完全子图的阶数为 k. 证明: 对任意非负实数 $x_1,\cdots,x_n$, 有不等式
>
> $$\sum_{\{i,j\}\in E} x_i x_j \leqslant \frac{k-1}{2k}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$
>
> 这里的求和是对 G 中的所有无向边 $\{i,j\}$ 进行的.

这是一个非常经典的图论中的不等式. 如果 G 本身是一个 k 阶完全图, 那么结论等价于

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \geqslant \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2,$$

由 Cauchy 不等式, 这是显然成立的. 如果 G 中有 $k+1$ 个顶点, 并且顶点 k 和 $k+1$ 是没有连边的, 那么原不等式等价于

$$\sum_{i=1}^{k-1} x_i^2 + (x_k + x_{k+1})^2 \geqslant \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right)^2.$$

这暗示着可以对 G 的顶点数归纳, 并且把相邻的顶点上的权重加在一起.

证明 不妨设 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. 在求和中加入 (i,j) 的顺序, 则原不等式等价于

$$\sum_{(i,j)\in E} x_i x_j \leqslant \frac{k-1}{k}.$$

定义 $G^c=(V,E^c)$ 为 G 的补图, 其中 $(i,j)\in E$ 当且仅当 $(i,j)\notin E^c$. 注意到

$$1=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\sum_{(i,j)\in E} x_i x_j+\sum_{(i,j)\in E^c} x_i x_j,$$

故原不等式等价于

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{(i,j)\in E^c} x_i x_j \geqslant \frac{1}{k}.$$

一般的, 对 n 阶简单图 $G=(V,E)$, 定义函数

$$f(G,x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{(i,j)\in E} x_i x_j. \tag{1}$$

接下来只需证明:

$$G \text{ 中任意 } k+1 \text{ 个顶点间有边相连} \Longrightarrow f(G,x) \geqslant \frac{1}{k}. \tag{2}$$

我们对 G 的顶点数归纳来证明 (2). 如果 G 的顶点数 $n \leqslant k$, 则

$$f(G,x) \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{k},$$

结论成立. 下面假设 (2) 对于 n 个点的情形成立 ($n \geqslant k$), 考察 $n+1$ 的情形.

给定 $n+1$ 阶简单图 G, 不妨设顶点 n 和 $n+1$ 相连. 定义 $n+1$ 维向量

$$x = (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

此时 $f(G,x)$ 可以改写为

$$f(G,x) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 + \sum_{\substack{(i,j)\in E \\ 1\leqslant i,j\leqslant n-1}} x_i x_j + 2\sum_{\substack{(i,n)\in E \\ i\neq n,n+1}} x_i x_n + 2\sum_{\substack{(i,n+1)\in E \\ i\neq n,n+1}} x_i x_{n+1} + 2x_n x_{n+1}. \tag{3}$$

根据顶点 n 和 $n+1$ 的对称性, 可不妨设

$$\sum_{\substack{(i,n)\in E \\ i\neq n,n+1}} x_i \leqslant \sum_{\substack{(i,n+1)\in E \\ i\neq n,n+1}} x_i. \tag{4}$$

根据 (3)(4) 即有

$$f(G,x) \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + (x_n + x_{n+1})^2 + \sum_{\substack{(i,j)\in E \\ 1\leqslant i,j\leqslant n-1}} x_i x_j + 2\sum_{\substack{(i,n)\in E \\ i\neq n,n+1}} x_i (x_n + x_{n+1}). \tag{5}$$

现在定义一个新的图 $G' = (V', E')$, 它正好是从 G 中去掉顶点 $n+1$ 及其所连的边剩下的图. 同时, 定义 n 维向量

$$x' = (x_1, \cdots, x_n + x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n.$$

于是 G' 中任意 $k+1$ 个顶点都有边相连 (因为剩下 n 个点的连边不受影响), 并且恰好有

$$f(G', x') = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + (x_n + x_{n+1})^2 + \sum_{\substack{(i,j)\in E \\ 1\leqslant i,j\leqslant n-1}} x_i x_j + 2 \sum_{\substack{(i,n)\in E \\ i\neq n,n+1}} x_i (x_n + x_{n+1}). \tag{6}$$

根据归纳假设, 从 (5)(6) 即可得到

$$f(G, x) \geqslant f(G', x') \geqslant \frac{1}{k},$$

故原命题得证. ■

如果我们在原命题中选择 $x_i = 1$, 则可以得到 Turán 定理的一个弱化版本:

> 设图 $G = (V, E)$ 是 n 阶简单图, 且最大完全子图的阶数为 k. 则
>
> $$|E| \leqslant \frac{(k-1)n^2}{2k}.$$