一道 IMO 试题的再推广

虚空若叶睦

2025 年 8 月 11 日

我们的故事从 2021 年 IMO 第 2 题开始:

> 对任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 证明:
>
> $$\sum_{i,j=1}^{n} \sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \sqrt{|x_i + x_j|}.$$

两个精妙的推广

赵斌和俞辰捷给出上凸函数版本的推广 (发布在数学新星网):

(**推广一**) 已知 f 是定义在 $[0, +\infty)$ 上的单调不减的上凸函数, 且 $f(0) = 0$, 则对任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 有

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(|x_i - x_j|) \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} f(|x_i + x_j|).$$

该结果的证明利用调整法和数学归纳法完成.

另一个有趣的推广是通过转化为半正定的二次型完成的.

(**推广二**) 给定 $0 < \alpha < 2$, 对任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 有

$$\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|^{\alpha} \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} |x_i + x_j|^{\alpha}.$$

该结果的证明主要利用下面的积分恒等式: 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^{1+\alpha}} \mathrm{d}t = C_{\alpha} |x|^{\alpha},$$

其中 $C_\alpha > 0$ 是一个仅依赖于 $\alpha \in (0,2)$ 的常数. 于是对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}|x+y|^\alpha - |x-y|^\alpha &= C_\alpha^{-1} \int_0^\infty \frac{\cos((x-y)t) - \cos((x+y)t)}{t^{1+\alpha}} \mathrm{d}t \\ &= 2C_\alpha^{-1} \int_0^\infty \frac{\sin(xt)\sin(yt)}{t^{1+\alpha}} \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因此可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n \left(|x_i + x_j|^\alpha - |x_i - x_j|^\alpha\right) &= 2C_\alpha^{-1} \sum_{i,j=1}^n \int_0^\infty \frac{\sin(x_i t)\sin(x_j t)}{t^{1+\alpha}} \mathrm{d}t \\ &= 2C_\alpha^{-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{1+\alpha}} \left(\sum_{i,j=1}^n \sin(x_i t)\right)^2 \mathrm{d}t \geqslant 0,\end{aligned}$$

故推广二成立. $\alpha = 2$ 的情形可以通过取 $\alpha \to 2^-$ 的极限或直接证明来得到. 当 $\alpha > 2$ 时, 上述积分在 $t = 0$ 附近发散, 因此不能使用相同的方法.

并且, 上述结果在 $\alpha > 2$ 时也不一定成立. 例如, $\alpha = 4$ 时不等式不会成立:

$$\sum_{i,j=1}^n \left((x_i + x_j)^4 - (x_i - x_j)^4\right) = 8 \sum_{i,j=1}^n (x_i x_j^3 + x_i^3 x_j) = 16 \sum_{i=1}^n x_i^3 \sum_{i=1}^n x_i,$$

显然上式的取值可能是负值.

推广二对复数版本 (乃至更高维的向量) 的 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 也都成立. 只需注意到如下结果: 取 v 是单位圆周上均匀分布的随机向量, 则对非负实数 α 和向量 $z \in \mathbb{R}^2$, 有

$$\mathbb{E}_v\left[|v \cdot z|^\alpha\right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos\theta|^\alpha |z|^\alpha \mathrm{d}\theta = C_\alpha |z|^\alpha.$$

受到上述问题的启发, 我设计了一道原创题目.

> 对任意非零复数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$, 证明:
> $$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{|z_i + z_j|}{\max(|z_i|, |z_j|)} \geqslant n^2.$$

该不等式在 n 为偶数时是可以取等的, 取等条件是 ± 1 各取一半; 在 n 是奇数时则是非紧的. 在证明之前, 我们首先说明一些有用的结果:

引理 1 设 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为非负实数, 则 $n \times n$ 矩阵 $C = \big(\min(c_i, c_j)\big)_{i,j=1}^{n}$ 是半正定的.

注意到, 对任意 $a, b \geqslant 0$, 有

$$\min(a, b) = \int_0^{\infty} \mathbb{I}(x \leqslant a)\mathbb{I}(x \leqslant a)\mathrm{d}x,$$

因此对任意实数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, 都有

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} \min(c_i, c_j)\xi_i\xi_j &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^{\infty} \xi_i\xi_j \mathbb{I}(x \leqslant x_i)\mathbb{I}(x \leqslant x_j)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathbb{I}(x \leqslant x_i)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant 0,\end{aligned}$$

故 C 是半正定的.

引理 2 设 A, B 为 $n \times n$ 半正定矩阵, 则 $\mathrm{tr}(AB) \geqslant 0$.

不妨假设 A 是正定的, 否则考虑 $A + \varepsilon I$ 并取 ε 充分小. 设 A 的 Cholesky 分解为 $A = LL^{\top}$,

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(LL^{\top}B) = \mathrm{tr}(L^{\top}BL) \geqslant 0.$$

最后一个不等号成立是因为 $L^{\top}BL$ 是半正定的.

现在回到原题的证明.

证明 注意到

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{|z_i+z_j|}{\max(|z_i|,|z_j|)}+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{|z_i-z_j|}{\max(|z_i|,|z_j|)}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{|z_i+z_j|+|z_i-z_j|}{\max(|z_i|,|z_j|)}\geqslant 2n^2,$$

因此我们只需证明:

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{|z_i+z_j|-|z_i-z_j|}{\max(|z_i|,|z_j|)}\geqslant 0. \tag{1}$$

为证明不等式 (1), 定义矩阵 $A=(A_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 和 $B=(B_{i,j})_{i,j=1}^{n}$, 其中

$$A_{i,j}=|z_i+z_j|-|z_i-z_j|,\qquad B_{i,j}=\frac{1}{\max(|z_i|,|z_j|)}.$$

于是 (1) 等价于 $\operatorname{tr}(AB)\geqslant 0$, 其中 tr 是矩阵的迹. 注意到,

$$B_{i,j}=\min\left(\frac{1}{|z_i|},\frac{1}{|z_j|}\right),$$

所以 B 是半正定的. 根据引理 2, 下面只需证明: A 是半正定的, 即对任意实数 $\xi_1,\cdots,\xi_n$, 有

$$\sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\xi_j\big(|z_i+z_j|-|z_i-z_j|\big)\geqslant 0. \tag{2}$$

根据复数推广的讨论, 要证明不等式 (2) 成立, 只需考察 $z_1,\cdots,z_n$ 都是实数的情况. 而在实数情况下, 不等式 (2) 可以立刻从推广二的证明中得到. 故原不等式得证.

使用同样的方法可以证明: 对任意实数 $0<\alpha\leqslant 1$, 有

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{|z_i+z_j|}{\max(|z_i|,|z_j|)}\right)^{\alpha}\geqslant 2^{\alpha-1}n^2,$$

且在 n 为偶数时等号可以取到. ■