向量内积不等式

虚空若叶睦

2025 年 8 月 19 日

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为平面向量, 满足 $|\boldsymbol{\alpha}_i|=1$, $i=1,\cdots,n$. 证明:

(1)

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ \langle\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle<\frac{\pi}{2}}}^{n}\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{\alpha}_j\geqslant\frac{n^2}{4}.$$

(2) 对任意正整数 $m\geqslant 2$, 有

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ \langle\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle<\frac{\pi}{m}}}^{n}\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{\alpha}_j\geqslant\frac{n^2}{2m}+2m\left\{\frac{n}{2m}\right\}\left(1-\left\{\frac{n}{2m}\right\}\right).$$

(本题来自于 b 站 UP 主 @氢溴的阿离)

这是一道颇有难度的, 兼具代数和组合风格的题目. 氢溴的阿离和我为各自为本题提供了风格不同的解答.

第一问: 夹角小于 $\frac{\pi}{2}$ 的情形

解法一 (虚空若叶睦)

证明 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(\cos\theta_i,\sin\theta_i)$, 其中 $\theta_i\in\mathbb{S}^1$, $i=1,\cdots,n$. 定义 $x,y\in\mathbb{S}^1$ 的距离 $|x-y|$ 为连接 x,y 的最短弧长. 容易看出 $\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{\alpha}_j=\cos(\theta_i-\theta_j)$, 其中 $i,j=1,\cdots,n$. 在之后的所有解答中均使用相同的记号. 注意到不等式

$$\sum_{i,j=1}^{n}\cos(\theta_i-\theta_j)=\left(\sum_{i=1}^{n}\cos\theta_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\sin\theta_i\right)^2\geqslant 0 \tag{1.1}$$

对一切 $\theta_1,\cdots,\theta_n\in\mathbb{S}^1$ 成立, 可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i,j=1\\ \langle\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle<\frac{\pi}{2}}}^{n}\boldsymbol{\alpha}_i\cdot\boldsymbol{\alpha}_j&=\sum_{|\theta_i-\theta_j|<\frac{\pi}{2}}\cos(\theta_i-\theta_j)=\sum_{i,j=1}^{n}\max\{\cos(\theta_i-\theta_j),0\}\\&=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\cos(\theta_i-\theta_j)+|\cos(\theta_i-\theta_j)|\Big)\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}|\cos(\theta_i-\theta_j)|,\end{aligned}$$

因此只需证明:

$$\sum_{i,j=1}^{n}|\cos(\theta_i-\theta_j)|\geqslant\frac{n^2}{2}.\tag{1.2}$$

再次利用不等式 (1.1), 即可得到

$$\sum_{i,j=1}^{n}|\cos(\theta_i-\theta_j)|\geqslant\sum_{i,j=1}^{n}\cos^2(\theta_i-\theta_j)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(1+\cos(2\theta_i-2\theta_j))\geqslant\frac{n^2}{2},$$

即 (1.2) 成立. 故原不等式得证. ■

解法二 (氢溴的阿离)

证明 为每一个 $\theta_i\in\mathbb{S}^1$ 都指定 θ_i 所正对的四分之一圆弧 C_i, 其中 C_i 的长度为 $s(C_i)=\frac{\pi}{2}$. 下面证明: 对 $\theta_i,\theta_j\in\mathbb{S}^1$, 它们对应的圆弧满足

$$\cos(\theta_i-\theta_j)\geqslant\frac{2}{\pi}s(C_i\cap C_j),\quad \text{如果 } |\theta_i-\theta_j|<\frac{\pi}{2}.\tag{1.3}$$

其中, $s(C_i\cap C_j)$ 表示两段圆弧的交的长度. 事实上, 若设两端圆弧的交的长度为 θ, 则容易看出 $|\theta_i-\theta_j|=\frac{\pi}{2}-\theta$, 此时不等式 (1.3) 即等价于

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta\geqslant\frac{2}{\pi}\theta,\qquad\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

上式显然成立. 接着利用 (1.3) 可以将目标函数转化为 $\mathbb{S}^1$ 上的曲线积分:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i,j=1\\ |\theta_i-\theta_j|<\frac{\pi}{2}}}^{n}\cos(\theta_i-\theta_j)&\geqslant\frac{2}{\pi}\sum_{i,j=1}^{n}s(C_i\cap C_j)\\&=\frac{2}{\pi}\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^{2\pi}\mathbb{I}(t\in C_i)\mathbb{I}(t\in C_j)\mathrm{d}s(t)\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}(t\in C_i)\right)^2\mathrm{d}s(t).\end{aligned}$$

再根据 Cauchy 不等式, 即可得到

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i,j=1\\|\theta_i-\theta_j|<\frac{\pi}{2}}}^{n}\cos(\theta_i-\theta_j)&\geqslant\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}(t\in C_i)\right)^2\mathrm{d}s(t)\\&\geqslant\frac{1}{\pi^2}\left(\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}(t\in C_i)\mathrm{d}s(t)\right)^2\\&=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}n\right)^2=\frac{n^2}{4},\end{aligned}$$

故原命题得证. ■

第二问: 夹角小于 $\dfrac{\pi}{m}$ 的情形

解法一 (虚空若叶睦)

证明 将 n 个辐角值 $\theta_1,\cdots,\theta_n$ 划分成若干个等价类, 其中 θ_i,θ_j 属于同一个等价类当且仅当

$$\theta_i-\theta_j \text{ 是 } \frac{\pi}{m} \text{ 的整数倍.}$$

由于 $m\geqslant 2$ 是正整数, 可以验证这个等价类具有传递性. 这个等价类的几何含义是: 同一等价类中的辐角应位于同一个正 $2m$ 边形的顶点上.

只有一个等价类: 直接验证不等式成立

如果 $\theta_1,\cdots,\theta_n$ 仅有一个等价类, 可以直接验证结论成立. 在这个等价类中的正 $2m$ 边形上, 假设每个顶点对应的辐角数分别是 $a_1,\cdots,a_{2m}$, 则 a_i 是非负整数, 且

$$\sum_{i=1}^{2m}a_i=n, \tag{2.1}$$

而我们的目标是证明

$$\sum_{i=1}^{2m}a_i^2\geqslant\frac{n^2}{2m}+2m\left\{\frac{n}{2m}\right\}\left(1-\left\{\frac{n}{2m}\right\}\right). \tag{2.2}$$

设 $n=2mq+r$, 其中 $0\leqslant r<2m$. 则 (2.2) 可以改写为

$$\sum_{i=1}^{2m}a_i^2\geqslant\frac{n^2}{2m}+r\left(1-\frac{r}{2m}\right). \tag{2.3}$$

由于 a_i 是非负整数, 故 (2.3) 的左侧在 $a_1,\cdots,a_{2m}$ 中恰好有 r 个 $q+1$ 和 $2m-r$ 个 q 时取最小值; 此时可验证 (2.3) 的等号恰好成立. 故 (2.2) 得证.

有多个等价类：调整以减少等价类的数量

如果 $\theta_1, \cdots, \theta_n$ 中有多个等价类, 不妨设 $\{\theta_i\}_{i\in A}$ 是其中一个等价类, 并定义 $B = \{1, \cdots, n\}\backslash A$. 现在, 将 A 中的辐角同时增加 $t \in \mathbb{S}^1$, 而 B 中的辐角保持不变. 注意到, 当 i, j 同时属于 A 或 B 时, 增加 A 中的辐角不会改变 $|\theta_i - \theta_j|$ 的值. 因此, 目标函数值的变化可以表示为

$$f(t) = \sum_{i\in A, j\in B} \cos(t + \theta_i - \theta_j) \cdot \mathbb{I}\left(|t + \theta_i - \theta_j| < \frac{\pi}{m}\right), \tag{2.4}$$

此处的求和只对 $i \in A, j \in B$ 计算, $\mathbb{I}(\cdot)$ 为指示函数. 下面证明: $f(t)$ 在 $t \in \mathbb{S}^1$ 上是下连续的, 即对任意收敛到 $t_* \in \mathbb{S}^1$ 的序列 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{S}^1$, 有

$$f(t_*) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} f(t_k).$$

根据 (2.4), 我们只需验证对每个 $i \in A, j \in B$, 都有

$$\cos(t_* + \theta_i - \theta_j) \cdot \mathbb{I}\left(|t_* + \theta_i - \theta_j| < \frac{\pi}{m}\right) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \cos(t_k + \theta_i - \theta_j) \cdot \mathbb{I}\left(|t_k + \theta_i - \theta_j| < \frac{\pi}{m}\right) \tag{2.5}$$

若 $|t_* + \theta_i - \theta_j| \geqslant \frac{\pi}{m}$, 则 (2.5) 显然成立, 因为其右端项恒非负. 若 $|t_* + \theta_i - \theta_j| < \frac{\pi}{m}$, 则对充分大的 k, 总有 $|t_k + \theta_i - \theta_j| < \frac{\pi}{m}$, 因此

$$\varliminf_{k\to\infty} \cos(t_k + \theta_i - \theta_j) \cdot \mathbb{I}\left(|t_k + \theta_i - \theta_j| < \frac{\pi}{m}\right) = \varliminf_{k\to\infty} \cos(t_k + \theta_i - \theta_j) = \cos(t_* + \theta_i - \theta_j),$$

从而 (2.5) 成立. 于是 $f(t)$ 是下连续的. 现在, 定义集合

$$T = \left\{t \in \mathbb{S}^1 : 存在\ i \in A, j \in B\ 使得\ |t + \theta_i - \theta_j| = \frac{\pi}{m}\right\}.$$

显然, T 是 $\mathbb{S}^1$ 上的非空的离散点集, 并且 $0 \notin T$, 因为 A, B 中的辐角来自不同的等价类. 因此, 一定存在 $\mathbb{S}^1$ 上的一段开圆弧 (l_1, l_2), 使得 $0 \in (l_1, l_2)$, 且 l 的两个端点 $l_1, l_2 \in T$. 于是当 $t \in (l_1, l_2)$ 时, (2.4) 中的指示函数 $\mathbb{I}(\cdot)$ 均不发生变化, 因此有

$$f''(t) = -\sum_{i\in A, j\in B} \cos(t + \theta_i - \theta_j) \cdot \mathbb{I}\left(|t + \theta_i - \theta_j| < \frac{\pi}{m}\right) \leqslant 0, \quad t \in (l_1, l_2),$$

从而 $f(t)$ 在 (l_1, l_2) 上为上凸函数. 在利用 $f(t)$ 在 $[l_1, l_2]$ 上的下连续性, 即可得到

$$f(0) \geqslant \varliminf_{\varepsilon\to 0^+} \min\left\{f(l_1 + \varepsilon), f(l_2 - \varepsilon)\right\} \geqslant \min\{f(l_1), f(l_2)\}. \tag{2.6}$$

不等式 (2.6) 意味着, 可以将 A 中的辐角同时增加 $t = l_1$ 或 l_2, 使得目标函数值不增加. 但是, $t \in T$ 意味着一定存在 $i \in A, j \in B$ 使得 $|t + \theta_i - \theta_j| = \pi/m$, 从而 $t + \theta_i$ 和 θ_j 属于同一个等价类. 因此, 原来的等价类 A 在全部加上辐角 t 后被吸收进了 B 中, 必然使得等价类的数量减少. 重复如上的操作, 最终会减少到只剩下一个等价类, 故原命题得证. $\blacksquare$

解法二 (氢溴的阿离)

证明 为每一个 $\theta_i \in \mathbb{S}^1$ 都指定 θ_i 所正对的圆心角为 $\frac{\pi}{m}$ 圆弧 C_i, 则 C_i 的长度为 $s(C_i) = \frac{\pi}{m}$. 下面证明: 对 $\theta_i, \theta_j \in \mathbb{S}^1$, 它们对应的圆弧满足

$$\cos(\theta_i - \theta_j) \geqslant \frac{m}{\pi} s(C_i \cap C_j), \quad \text{如果 } |\theta_i - \theta_j| < \frac{\pi}{m}. \tag{2.7}$$

设两端圆弧的交的长度为 θ, 则 $|\theta_i - \theta_j| = \frac{\pi}{m} - \theta$, 此时不等式 (2.7) 等价于

$$\cos\left(\frac{\pi}{m} - \theta\right) \geqslant \frac{m}{\pi}\theta, \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{m}\right]. \tag{2.8}$$

由于 $\cos x$ 为上凸函数, 且 (2.8) 对于 $\theta = 0$ 和 $\frac{\pi}{m}$ 的情形均成立, 故 (2.8) 对于 $\theta \in [0, \frac{\pi}{m}]$ 恒成立, 故 (2.7) 得证. 于是, 我们可以得到

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ |\theta_i - \theta_j| < \frac{\pi}{m}}}^{n} \cos(\theta_i - \theta_j) \geqslant \frac{m}{\pi} \sum_{i,j=1}^{n} s(C_i \cap C_j)$$

从而原问题归结于证明

$$\sum_{i,j=1}^{n} s(C_i \cap C_j) \geqslant \left(\frac{n^2}{2m^2} + 2\left\{\frac{n}{2m}\right\}\left(1 - \left\{\frac{n}{2m}\right\}\right)\right)\pi. \tag{2.9}$$

现在, 将每一段圆弧 C_i 想象成在单位圆环上一段长度为 $\frac{\pi}{m}$ 的贴纸, 对 $k \geqslant 0$, 定义 s_k 是单位圆环上恰好被 k 层贴纸覆盖的长度. 使用严格的数学定义, 此即

$$s_k = m\left(t \in \mathbb{S}^1 : \#\left\{1 \leqslant i \leqslant n : t \in C_i\right\} = k\right), \qquad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

于是容易看出,

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k = 2\pi, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k s_k = \frac{n\pi}{m}. \tag{2.10}$$

由于 $s(C_i\cap C_j)$ 计算同时属于 C_i 和 C_j 的点的测度, 故

$$\sum_{i,j=1}^{n} s(C_i\cap C_j)=\sum_{k=0}^{\infty} k^2 s_k.$$

因此原问题转化为了下面的代数问题: 在 (2.10) 的条件下, 证明

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 s_k \geqslant \left(\frac{n^2}{2m^2}+2\left\{\frac{n}{2m}\right\}\left(1-\left\{\frac{n}{2m}\right\}\right)\right)\pi.$$

设 $n=2mq+r$, 其中 $0\leqslant r<2m$, 则上式可等价写为

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 s_k \geqslant \frac{1}{m}\big(2mq^2+(2q+1)r\big)\pi. \tag{2.11}$$

为证明 (2.11), 注意到 $(k-q)(k-q-1)\geqslant 0$ 对一切非负整数 k 成立,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k-q)(k-q-1)s_k\geqslant 0$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} k^2 s_k &\geqslant (2q+1)\sum_{k=0}^{\infty} k s_k - q(q+1)\sum_{k=0}^{\infty} s_k\\ &=(2q+1)\frac{n\pi}{m}-2q(q+1)\pi\\ &=\frac{1}{m}\big(2mq^2+(2q+1)r\big)\pi,\end{aligned}$$

故 (2.11) 得证. 从而原命题得证.