从数列极限到函数极限需要什么?

虚空若叶睦

2025 年 8 月 17 日

> 若 $(0, +\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 使得 $\lim_{n\to\infty} f(nh)$ 对一切 $h > 0$ 存在且有限, 则
> $$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ 存在且有限.}$$

这是一个经典的分析问题, 被称为 Croft–Kingman 引理. 它首次出现于 Kingman 的论文

- *Ergodic properties of continuous-time Markov processes and their discrete skeletons*, Proc. London Math. Soc. (3) **13** (1963), 593–604

中的 Theorem 2. 这个问题也出现在 Selected Problems in Real Analysis (Makarov, Goluzina, Lodkin & Podkorytov) 和周民强的数学分析习题集上. 问题的一个弱化版本是:

$$\text{若连续函数 } f(x) \text{ 使得 } \lim_{n\to\infty} f(nh) = 0 \text{ 对一切 } h > 0 \text{ 成立, 则 } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

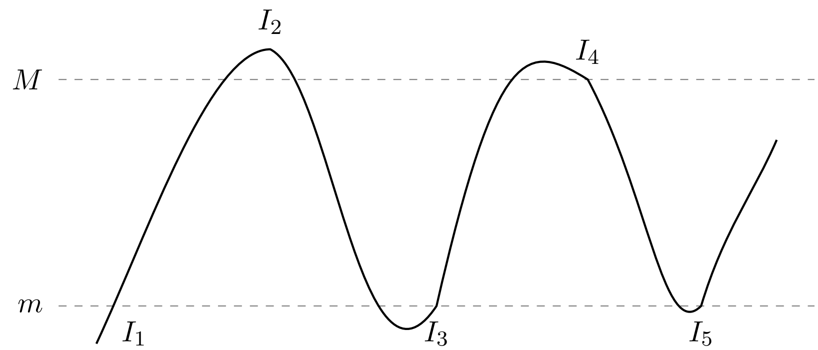
相关问题也大量出现在 Math.StackExchange 上:

- `https://math.stackexchange.com/questions/63870`
- `https://math.stackexchange.com/questions/616745`
- `https://math.stackexchange.com/questions/3109975`

在本文档中, 我们介绍该结果的两种证法, 一种是基于纯数学分析的闭区间套定理, 另一种是基于泛函分析中的 Baire 纲定理. 最后, 设 E 是定义在 $[1, 2]$ 上的 Cantor 集. 如果原题条件弱化为 $\lim_{n\to\infty} f(nh)$ 只对 $h \in E$ 成立, 那么结论存在反例.

闭区间套定理证明

要证明 $f(x)$ 的极限存在且有限, 一个自然的想法是反证法: 假设存在 $M > m$, 以及一列闭区间 $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ 使得 $f(x)$ 在 I_k 上交替地小于 m 和大于 M, 如下图所示.



这样, 我们的任务就变成了找到一个特殊的 $h > 0$, 使得存在充分大的正整数 k 和 n 使得 $nh \in I_k$. 不过这样的 h 并不容易直接构造出来, 我们需要构造大量形如 $[a, b]$ 的区间, 使得 $[na, nb] \subset I_k$, 并用闭区间套定理选出对应的 h. 这便是证明的基本动机.

证明 先来证明下面的引理.

引理 设 $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ 是 $(0, +\infty)$ 中的一列闭区间, 且 I_k 的中心点发散到正无穷. 则对任意非空闭区间 $[a, b] \subset (0, +\infty)$ 和正整数 t, 存在子区间 $[a', b'] \subset [a, b]$, 正整数 n 和 $k \geqslant t$, 使得

$$[na', nb'] \subset I_k.$$

引理的证明 令闭区间 $I_k = [x_k - \delta_k, x_k + \delta_k]$. 不妨设 $\delta_k < \frac{b-a}{3}$ 对所有 k 均成立. 注意到, 存在 $M > 0$, 使得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n(2a+b)}{3}, \frac{n(a+2b)}{3}\right] \supset [M, +\infty),$$

故任取指标 k 使得 $x_k \geqslant M$ 且 $k \geqslant t$, 可知存在正整数 n 使得

$$x_k \in \left[\frac{n(2a+b)}{3}, \frac{n(a+2b)}{3}\right],$$

也即存在某个 $c \in \left[\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}\right]$ 使得 $x_k = nc$. 下面取

$$a' = c - \frac{\delta_k}{n}, \qquad b' = c + \frac{\delta_k}{n}$$

即知 $[a',b']\subset[a,b]$, 且 $[na',nb']=I_k$.

回到原题. 如果结论不成立, 则 $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} f(x)>\varliminf\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 下面取实数 m,M 满足

$$\varliminf_{x\to+\infty} f(x)<m<M<\varlimsup_{x\to+\infty} f(x).$$

于是, 可以取一列严格单调递增的正数序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, 使得

- 当 k 为奇数时, $f(x_k)<m$.
- 当 k 为偶数时, $f(x_k)>M$.

由于 $f(x)$ 的连续性, 可找到 $\delta_k\in(0,\min(x_k,1))$ 使得闭区间 $I_k=[x_k-\delta_k,x_k+\delta_k]$ 满足

- 当 k 为奇数时, $f(x)\leqslant m$, 对任意 $x\in I_k$.
- 当 k 为偶数时, $f(x)\geqslant M$, 对任意 $x\in I_k$.

根据引理, 可以递推地构造一列闭区间 $\big([a_t,b_t]\big)_{t=0}^{\infty}$, 满足:

1. $[a_0,b_0]$ 可以是 $(0,+\infty)$ 中的任意闭区间, 例如 $[a_0,b_0]=[1,2]$.
2. 对任意正整数 t, $[a_t,b_t]\subset[a_{t-1},b_{t-1}]$.
3. 对任意正整数 t, 存在正整数 $n\geqslant 1$ 和与 t 同奇偶的 $k\geqslant t$, 使得 $[na_t,nb_t]\subset I_k$.

根据闭区间套定理, 存在 $h\in\bigcap\limits_{t=1}^{\infty}[a_t,b_t]$, 使得存在正整数列 $\{n_t\}_{t=1}^{\infty}$ 和 $\{k_t\}_{t=1}^{\infty}$, 满足

1. $k_t\geqslant t$, 且 k_t 与 t 同奇偶.
2. $n_th\in I_{k_t}$.

根据区间 I_k 的定义, 可以立刻得到:

- 当 t 是奇数时, $f(n_th)\leqslant m$.
- 当 t 是偶数时, $f(n_th)\geqslant M$.

由于 I_{k_t} 的中心点发散到正无穷, 且 I_{k_t} 的宽度不超过 2, 故 $\lim\limits_{t\to\infty} n_t=+\infty$. 但根据条件, $\lim\limits_{n\to\infty} f(nh)$ 应当是固定值, 与上面的结论矛盾! ■

Baire 纲定理证明

Baire 纲定理由两个部分组成:

定理 1 设 X 是完备度量空间且 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中稠密的开集. 则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 非空.

定理 2 设 X 是完备度量空间且 $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中无处稠密的闭集. 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \neq X$.

无处稠密的闭集的等价说法是: 闭集的内部为空/不包含任何开球. 下面给出原题的证明:

证明 考察闭区间 $[1,2]$, 它显然是一个完备度量空间. 基于 Cauchy 收敛定理的形式, 对任意 $\varepsilon > 0$ 和正整数 N, 定义集合

$$C_N(\varepsilon) = \big\{h \in [1,2] : |f(nh) - f(mh)| \leqslant \varepsilon \text{ 对正整数 } n, m \geqslant N \text{ 恒成立}\big\}.$$

对每一个 $h \in [1,2]$, 根据条件 $\lim\limits_{n\to\infty} f(nh)$ 存在, 故存在正整数 N 使得 $|f(nh) - f(mh)| \leqslant \varepsilon$ 对 $n, m \geqslant N$ 恒成立, 从而 $h \in C_N(\varepsilon)$. 因此我们得到

$$[1,2] = \bigcup_{N=1}^{\infty} C_N(\varepsilon). \tag{1}$$

下面证明 $C_N(\varepsilon)$ 是闭集. 假设 $\{h_j\}_{j=1}^{\infty} \subset C_N(\varepsilon)$ 且 $h_j \to h_0$, 我们来证明 $h_0 \in C_N(\varepsilon)$. 事实上, 根据 $C_N(\varepsilon)$ 的定义可得

$$|f(nh_j) - f(mh_j)| \leqslant \varepsilon \text{ 对正整数 } n, m \geqslant N \text{ 恒成立}.$$

由于 $f(x)$ 是连续函数, 故令 $j \to \infty$ 有

$$|f(nh_0) - f(mh_0)| \leqslant \varepsilon \text{ 对正整数 } n, m \geqslant N \text{ 恒成立}.$$

从而 $h_0 \in C_N(\varepsilon)$, 即 $C_N(\varepsilon)$ 是闭集. 应用 Baire 纲定理, 存在某个 $C_N(\varepsilon)$ 包含一段连续的区间 $[a,b]$. 由于函数 $f(Nh)$ 在 $h \in [a,b]$ 上是一致连续的, 故存在 $\delta > 0$ 使得

$$|h_x - h_y| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(Nh_x) - f(Nh_y)| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

基于 (2), 任意选择区间 $[a_0, b_0] \subset [a,b]$, 且使得 $b_0 - a_0 \leqslant \delta$. 于是对任意 $h \in [a_0, b_0]$, 有

$$|f(nh) - f(mh)| \leqslant \varepsilon \text{ 对正整数 } n, m \geqslant N \text{ 恒成立}. \tag{3}$$

由于 $\bigcup_{n=N}^{\infty}[na_0, nb_0]$ 一定包含某个区间 $[M, +\infty)$, 故对任意 $x, y \geqslant M$, 一定存在正整数 $n_x, n_x \geqslant N$ 和 $h_x, h_y \in [a_0, b_0]$ 使得

$$f(x) = f(n_x h_x), \qquad f(y) = f(n_y h_y). \tag{4}$$

而另一方面, 根据 (2)(3) 可以得到

$$|f(Nh_x) - f(Nh_y)| \leqslant \varepsilon, \quad |f(n_x h_x) - f(Nh_x)| \leqslant \varepsilon, \quad |f(n_y h_y) - f(Nh_y)| \leqslant \varepsilon. \tag{5}$$

于是由 (4)(5) 可以得到: 对任意 $x, y \geqslant M$, 有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 3\varepsilon.$$

由于 ε 可以任意小, 故由 Cauchy 收敛定理 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且有限. 原命题得证. ■

注: 我的原证明的最后一步是有问题的. 感谢 b 站用户凤梨老师 e_e 的指出.

上述两个证明当中其实都用到了下面这个核心性质: 对任何正数 $a < b$, 集合

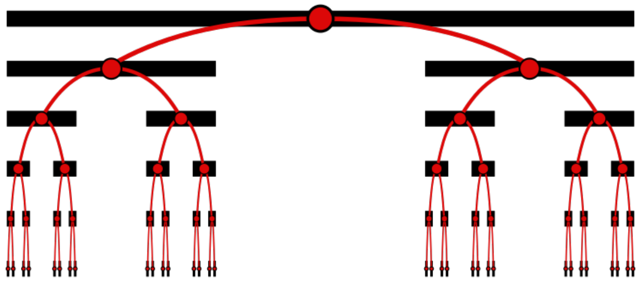
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}[na, nb] \supset [M, +\infty)$$

对某个 $M > 0$ 成立. 利用完全相同的证法, 可以得到如下结果:

> 设 $E \subset (0, +\infty)$ 是内部非空的闭集. 若 $(0, +\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(nh)$ 对一切 $h \in E$ 存在且有限, 则
>
> $$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ 存在且有限.}$$

不过, 如果集合 E 去掉了内部非空的条件, 则结果可能不对.

> 设 E 是 $[1, 2]$ 上的 Cantor 集. 则存在 $(0, +\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(nh) = 0$ 对一切 $h \in E$ 成立, 但
>
> $$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ 不存在.}$$



证明留给读者作为练习.

(提示: 对任意区间 $(n,n+1)$, 只有 $E, 2E, \cdots, nE$ 可能与 $(n,n+1)$ 非空. 对每个 kE 找一个更大的集合 F_k, 使得 F_k 是一些闭区间的并, 且 $m(F_k) < (n+1)^{-1}$. 于是 $(n,n+1)\setminus\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ 具有正测度, 并且是一些开区间的并. 在其中一个开区间上定义尖峰即可.)