

简单精巧的 n 元复数不等式

虚空若叶睦 @bilibili

Purdue University, West Lafayette, IN 47906, USA

2026 年 4 月 8 日

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, 定义多项式

$$f(z) = (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n).$$

证明: 存在 $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| = 1$, 使得

$$|f(z_0)| \geq \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{j=1}^n (1 + |\alpha_j|).$$

分析 如果 $n = 1$, 那么问题变成 $|f(z_0)| \geq 1 + |\alpha_1|$, 只要取 $z_0 = -\alpha_1/|\alpha_1|$ 在 α_1 相反的方向上, 就有等号成立. 如果 $n = 2$, 那么问题变为找一个单位复数 z_0 , 使得

$$|f(z_0)| \geq \frac{1}{2}(1 + |\alpha_1|)(1 + |\alpha_2|).$$

基于 α_1 和 α_2 的幅角, 我们总可以找到一个单位复数 z_0 , 使得 z_0 分别与 α_1, α_2 关于原点所成的角都不小于 90° . 由余弦定理, 得不等式

$$|z_0 - \alpha_1| \geq \sqrt{1 + |\alpha_1|^2}, \quad |z_0 - \alpha_2| \geq \sqrt{1 + |\alpha_2|^2}.$$

于是根据 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$|f(z_0)| \geq \sqrt{(1 + |\alpha_1|^2)(1 + |\alpha_2|^2)} \geq \frac{1}{2}(1 + |\alpha_1|)(1 + |\alpha_2|).$$

于是 $n = 2$ 的情形成立. 对于更大的 n , 上述直觉性的做法就不管用了, 需要更加深入的工具. 不过, 基本的思路都是通过 z_0 和 $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ 之间的夹角放缩.

我们需要的核心工具是三角形式的 Chebyshev 最大模定理.

引理 设 $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$, 则

$$\max_{x \in [0, 2\pi)} \left| \prod_{j=1}^n \cos(x - \theta_j) \right| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

证明 记上述的三角多项式为 $f(x)$. 注意到, 余弦的积化和差公式是

$$\cos \theta \cos \phi = \frac{1}{2} (\cos(\theta - \phi) + \cos(\theta + \phi)).$$

因此, $f(x)$ 作为 n 个三角单项式 $\cos(x - \theta_k)$ 的乘积一定可以写成三角多项式的形式, 且

$$f(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(nx - \Theta) + T_{n-1}(x), \quad \text{其中 } \Theta = \sum_{j=1}^n \theta_j.$$

这里 $nx - \Theta$ 是 n 项 $x - \theta_k$ 的求和, 前面的 $1/2^{n-1}$ 系数是由于应用了 $n - 1$ 次积化和差, 最后的 $T_{n-1}(x)$ 是一个次数不超过 $n - 1$ 的三角多项式, 也就是 $T_{n-1}(x)$ 可以写成

$$T_{n-1}(x) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} A_k e^{ikx}, \quad \text{其中 } A_k \in \mathbb{C}.$$

下面取 $[0, 2\pi)$ 上的 $2n$ 个等距节点为

$$x_j = \frac{j\pi + \Theta}{n}, \quad j = 0, 1, \dots, 2n - 1.$$

则 $\cos(nx - \Theta)$ 在节点 x_j 上的值为 $(-1)^j$. 于是

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j f(x_j) &= \frac{2n}{2^{n-1}} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j e^{ikx_j} \\ &= \frac{2n}{2^{n-1}} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k e^{i\frac{k\Theta}{n}} \sum_{j=0}^{2n-1} e^{ij(1+\frac{k}{n})\pi} \\ &= \frac{2n}{2^{n-1}}. \end{aligned} \quad (2n \text{ 次单位根等比数列求和})$$

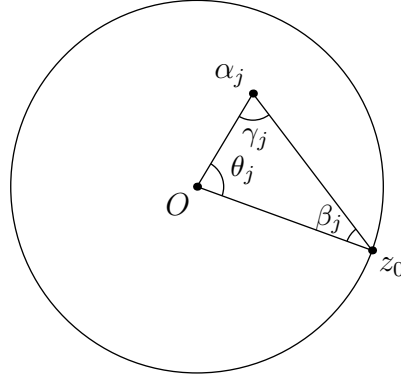
从而我们得到不等式

$$\sum_{j=0}^{2n-1} |f(x_j)| \geq \frac{2n}{2^{n-1}} \implies \max_{0 \leq j \leq 2n-1} |f(x_j)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

等号成立的一个充分条件是

$$f(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sin nx = \prod_{j=0}^{n-1} \sin\left(x + \frac{j\pi}{n}\right).$$

证明 回到原题. 对单位复数 z_0 , 设三角形 $Oz_0\alpha_j$ 中顶点 O, z_0, α_j 处的内角分别为 $\theta_j, \beta_j, \gamma_j$.



根据正弦定理, 有

$$\frac{|z_0 - \alpha_j|}{1 + |\alpha_j|} = \frac{\sin \theta_j}{\sin \beta_j + \sin \gamma_j} = \frac{2 \sin \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_j}{2}}{2 \sin \frac{\beta_j + \gamma_j}{2} \cos \frac{\beta_j - \gamma_j}{2}} = \frac{\sin \frac{\theta_j}{2}}{\cos \frac{\beta_j - \gamma_j}{2}} \geq \sin \frac{\theta_j}{2}.$$

因此我们得到不等式

$$\frac{|z_0 - \alpha_j|}{1 + |\alpha_j|} \geq \left| \sin \left(\frac{\arg z_0 - \arg \alpha_j}{2} \right) \right|, \quad j = 1, \dots, n.$$

因此, 只需找一个 $x = \arg z_0 \in \mathbb{R}$ 使得

$$\left| \prod_{j=1}^n \sin \left(\frac{x - \arg \alpha_j}{2} \right) \right| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

根据引理, 满足要求的 x 一定存在.